Mathematik für Informatiker

3. Funktionen, Relationen, vollständige Induktion

1. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:
   a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
   b) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = e^x$
   c) $A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
   d) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
   e) $A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},\ B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$
   f) $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$
   g) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{1}{n}$
   h) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$

   Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A',B' von A, B an so, daß $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

2. Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f : X \to Z,\ h(x) := g(f(x))$, ihre Komposition. Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv. (Gilt h bijektiv auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g?)

3. Geben Sie eine Relation auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ an, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist.

4. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?
   a) $X = \mathbb{N}$, mR_an, wenn $m + n$ gerade
   b) $X = \mathbb{N}$, mR_bn, wenn $m + n$ ungerade
   c) $X = \mathbb{N}$, mR_cn, wenn $|m - n| \leq 2$
   d) $X = \mathbb{N}$, mR_dn, wenn $\frac{m}{n}$ ganzzahlige Potenz von 2
   e) $X = \mathbb{N}$, mR_en, wenn $m|n$
   f) $X = \mathbb{R}$, xR_fy, wenn $e^x = e^y$
   g) $X = \mathbb{R}$, xR_gy, wenn $x^2 = y^2$
   h) $X = \mathbb{Z}$, aR_hb, wenn $4|a - b$
   i) $X = \mathbb{N}$, mR_in, wenn mn ungerade
   j) $X = \mathbb{R}$, xR_jy, wenn $x \leq y$
   k) $X =$ Menge der Menschen, $\bigcirc\ R_k\ \bigcirc$, wenn $\bigcirc$ liebt $\bigcirc$

5. Welche der Relationen aus Aufgabe 4 sind Ordnungsrelationen und welche Äquivalenzrelationen? (Geben Sie die entsprechende Klasseneinteilung an!).

6. Zeigen Sie, daß folgende Relation auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist:

   $$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

   Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

7. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

   a) die Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n > 1 + nx$ für $x > -1, x \neq 0, n > 1$.

   b) die Summenformel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

   c) die Formel für die n-te Ableitung (nach x) des Produktes zweier n mal differenzierbaren Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.

8. Gegeben seien die ganzen Zahlen
   $a = 1320, \quad b = 126, \quad c = 2401,$
   sowie die (reellen) Polynome
   $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ q(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x,\ s(x) = x^2 - 4.$

   Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler von

   a) a und b b) a und c c) $p(x)$ und $q(x)$ d) $q(x)$ und $s(x)$

   mit Hilfe der Primelementezerlegung sowie des Euklidischen Algorithmus.

   Wie sieht das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b, von a, b und c sowie von $p(x)$ und $q(x)$ aus?

Zusatz: Gibt es eine Bijektion zwischen folgenden Mengen.
a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ b) $[a,b], [c,d]$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$
c) $(-\infty, \infty), (0,1)$ d) $[0,1), (0,1]$ e) $[0,1], [0,1)$
Wenn ja, geben Sie eine Bijektion an!

2. Hausaufgabe:

- Aufgabe 1e), 1g),
- Aufgabe 4b), 4i),
- Aufgabe 7c),
- Aufgabe 8b), 8d) sowie das kleinste gemeinsame Vielfache von a, b und c aus Aufgabe 8

Abgabe: am 27. und 28.11. in der Übung