

Direkte Inversion der NFFT

Melanie Kircheis

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik

Rhein-Ruhr-Workshop
Bestwig, 1. Februar 2019

Überblick

① Einführung

② Inverse NFFT

- quadratischer Fall
- unterbestimmter Fall
- überbestimmter Fall

③ Numerische Ergebnisse

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],
 [Potts, Steidl, Tasche 01]

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

- äquidistante Knoten mit $M = N \Rightarrow$ FFT: $\mathcal{O}(N \log N)$

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],
 [Potts, Steidl, Tasche 01]

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

- äquidistante Knoten mit $M = N \Rightarrow$ FFT: $\mathcal{O}(N \log N)$
- **Komplexität:** $\mathcal{O}(M \log M + N)$

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],
 [Potts, Steidl, Tasche 01]

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

- äquidistante Knoten mit $M = N \Rightarrow$ FFT: $\mathcal{O}(N \log N)$
- **Komplexität:** $\mathcal{O}(M \log M + N)$
- Adjungiertes Problem:

$$h_k = \sum_{j=1}^N f_j e^{-2\pi i k y_j}, \quad k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1.$$

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],
 [Potts, Steidl, Tasche 01]

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{A} := \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=1, k=-\frac{M}{2}}^{N, \frac{M}{2}-1}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

- äquidistante Knoten mit $M = N \Rightarrow$ FFT: $\mathcal{O}(N \log N)$
- **Komplexität:** $\mathcal{O}(M \log M + N)$
- Adjungiertes Problem:

$$h_k = \sum_{j=1}^N f_j e^{-2\pi i k y_j}, \quad k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1.$$

- Faktorisierung: $\mathbf{A} \approx \mathbf{BFD}$ und $\mathbf{A}^* \approx \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^*$

$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \nwarrow \\ \text{sparse} & \uparrow & \text{diagonal} \\ & \text{FFT} & \end{array}$

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],
 [Potts, Steidl, Tasche 01]

Nicht-äquidistante schnelle Fourier-Transformation (NFFT)

Schneller Algorithmus zur Auswertung eines trigonometrischen Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{A} := \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=1, k=-\frac{M}{2}}^{N, \frac{M}{2}-1}$$

an nicht-äquidistant verteilten Knoten $y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, N$.

- äquidistante Knoten mit $M = N \Rightarrow$ FFT: $\mathcal{O}(N \log N)$
- **Komplexität:** $\mathcal{O}(M \log M + N)$
- Adjungiertes Problem:

$$h_k = \sum_{j=1}^N f_j e^{-2\pi i k y_j}, \quad k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1.$$

- Faktorisierung: $\mathbf{A} \approx \mathbf{BFD}$ und $\mathbf{A}^* \approx \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^*$

$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{sparse} & \text{FFT} & \text{diagonal} \end{matrix}$

[Dutt, Rokhlin 93], [Beylkin 95],

[Potts, Steidl, Tasche 01]

- [Nieslony, Steidl 03]: Minimierung des Approximationsfehlers über

$$\underset{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : \mathbf{B} \text{ (2m+1)-sparse}}{\text{Minimiere}} \|\mathbf{A} - \mathbf{BFD}\|_{\mathbb{F}}^2$$

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

Problem: i. A. gilt $M \neq N$

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

Problem: i. A. gilt $M \neq N$

Bisherige Ansätze:

- iterativ:
 - [Feichtinger, Gröchenig 95]: CG-Verfahren, $M < N$
 - [Kunis, Potts 07]: CG-Verfahren & NFFT, $M > N$
 - [Ruiz-Antolin, Townsend 18]: CG & Niedrigrang-Approx., $M = N$

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

Problem: i. A. gilt $M \neq N$

Bisherige Ansätze:

- iterativ:
 - [Feichtinger, Gröchenig 95]: CG-Verfahren, $M < N$
 - [Kunis, Potts 07]: CG-Verfahren & NFFT, $M > N$
 - [Ruiz-Antolin, Townsend 18]: CG & Niedrigrang-Approx., $M = N$
- direkt für $M = N$:
 - [Dutt, Rokhlin 93]: Lagrange Interpolation & FMM
 - [Selva 18]: Lagrange Interpolation & imaginärer Shift

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

Problem: i. A. gilt $M \neq N$

Bisherige Ansätze:

- iterativ: [Feichtinger, Gröchenig 95]: CG-Verfahren, $M < N$
[Kunis, Potts 07]: CG-Verfahren & NFFT, $M > N$
[Ruiz-Antolin, Townsend 18]: CG & Niedrigrang-Approx., $M = N$
- direkt für $M = N$: [Dutt, Rokhlin 93]: Lagrange Interpolation & FMM
[Selva 18]: Lagrange Interpolation & imaginärer Shift
- frame-theoretisch: [Gelb, Song 13/14], [Davis, Gelb, Song 16], $M < N$

iNFFT

Gegeben: $f_j = f(y_j)$, z.B. für $f(x) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x}$

Gesucht: $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1$

Motivation: FFT ist invertierbar

diverse Anwendungen: MRT, Lösung von PDEs, ...

Problem: i. A. gilt $M \neq N$

Bisherige Ansätze:

- iterativ: [Feichtinger, Gröchenig 95]: CG-Verfahren, $M < N$
 [Kunis, Potts 07]: CG-Verfahren & NFFT, $M > N$
 [Ruiz-Antolin, Townsend 18]: CG & Niedrigrang-Approx., $M = N$
- direkt für $M = N$: [Dutt, Rokhlin 93]: Lagrange Interpolation & FMM
 [Selva 18]: Lagrange Interpolation & imaginärer Shift
- frame-theoretisch: [Gelb, Song 13/14], [Davis, Gelb, Song 16], $M < N$

Nun: neue direkte Methode für den **allgemeinen Fall**

Probleme:

(1) Löse

$$A\hat{f} = f,$$

geg.: f , ges.: \hat{f} .

⇒ inverse NFFT

Probleme:

(1) Löse

$$A\hat{f} = f,$$

geg.: f , ges.: \hat{f} .

 \Rightarrow inverse NFFT

(2) Löse

$$A^*f = h,$$

geg.: h , ges.: f .

 \Rightarrow inverse adjungierte NFFT

Quadratischer Fall $M = N$

Gegeben seien 2 Auswertungen eines trigonometrischen Polynoms

$$f_j := f(y_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k y_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

und

$$g_l := f(x_l) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x_l}, \quad l = 1, \dots, N,$$

an verschiedenen Punkten $x_l, y_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Quadratischer Fall $M = N$

Gegeben seien 2 Auswertungen eines trigonometrischen Polynoms

$$f_j := f(y_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k y_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

und

$$g_l := f(x_l) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{f}_k e^{2\pi i k x_l}, \quad l = 1, \dots, N,$$

an verschiedenen Punkten $x_l, y_j \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dann gilt der Zusammenhang

$$g_l = c_l \sum_{j=1}^N f_j d_j \left(\frac{1}{\tan(\pi(x_l - y_j))} - i \right), \quad l = 1, \dots, N,$$

mit

$$c_l = \prod_{n=1}^N \sin(\pi(x_l - y_n)) \quad \text{und} \quad d_j = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \frac{1}{\sin(\pi(y_j - y_n))}, \quad l, j = 1, \dots, N.$$

Wählen x_l äquidistant.

⇒ Schneller Algorithmus:

- 1 Berechne g_l mittels schneller Summation.
- 2 Berechne

$$\check{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N g_l e^{-2\pi i k x_l}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

mithilfe einer FFT.

Ausgabe: $\check{f}_k \approx \hat{f}_k$

Komplexität: $\mathcal{O}(N \log N)$

außerdem: **Stabilisierung**, da sonst Unter-/Überlauf in c_l und d_j

Wählen x_l äquidistant.

⇒ Schneller Algorithmus:

- 1 Berechne g_l mittels schneller Summation.
- 2 Berechne

$$\check{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N g_l e^{-2\pi i k x_l}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

mithilfe einer FFT.

Ausgabe: $\check{f}_k \approx \hat{f}_k$

Komplexität: $\mathcal{O}(N \log N)$

außerdem: **Stabilisierung**, da sonst Unter-/Überlauf in c_l und d_j

⇒ ebenso inverse adjungierte NFFT

Grundidee

Betrachten äquidistante Knoten $y_j = \frac{j}{N} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{\substack{j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ k=-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}-1}} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{\substack{k=-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}-1 \\ j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1}}$$

Grundidee

Betrachten äquidistante Knoten $y_j = \frac{j}{N} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = N \mathbf{I}_M \quad \text{für } N \geq M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = M \mathbf{I}_N \quad \text{für } N \leq M \text{ mit } N \mid M$$

Grundidee

Betrachten äquidistante Knoten $y_j = \frac{j}{N} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k \frac{j}{N}} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = N \mathbf{I}_M \quad \text{für } N \geq M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = M \mathbf{I}_N \quad \text{für } N \leq M \text{ mit } N \mid M$$

\Rightarrow Inversion nur in speziellen Fällen gegeben.

Grundidee

Betrachten **nicht-äquidistante** Knoten $y_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k y_j} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \neq \mathbf{N} \mathbf{I}_M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* \neq \mathbf{M} \mathbf{I}_N$$

\Rightarrow Inversion nur in speziellen Fällen gegeben.

Suchen gute Approximation im allgemeinen Fall.

Grundidee

Betrachten **nicht-äquidistante** Knoten $y_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k y_j} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \neq \mathbf{N} \mathbf{I}_M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* \neq \mathbf{M} \mathbf{I}_N$$

\Rightarrow Inversion nur in speziellen Fällen gegeben.

Suchen gute Approximation im allgemeinen Fall.

$$\rightsquigarrow \text{Approximation der Form } \mathbf{A} \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \approx \mathbf{M} \mathbf{I}_N$$

Grundidee

Betrachten **nicht-äquidistante** Knoten $y_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k y_j} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \neq \mathbf{N} \mathbf{I}_M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* \neq \mathbf{M} \mathbf{I}_N$$

\Rightarrow Inversion nur in speziellen Fällen gegeben.

Suchen gute Approximation im allgemeinen Fall.

\rightsquigarrow Approximation der Form $\mathbf{A} \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \approx \mathbf{M} \mathbf{I}_N$

\rightsquigarrow Modifikation der Matrix \mathbf{B}

Grundidee

Betrachten **nicht-äquidistante** Knoten $y_j \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \left(e^{2\pi i k y_j} \right)_{j=-\frac{N}{2}, k=-\frac{M}{2}}^{\frac{N}{2}-1, \frac{M}{2}-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^* = \left(e^{-2\pi i k y_j} \right)_{k=-\frac{M}{2}, j=-\frac{N}{2}}^{\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-1}$$

Für deren Produkte gilt:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \neq \mathbf{N} \mathbf{I}_M$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* \neq \mathbf{M} \mathbf{I}_N$$

\Rightarrow Inversion nur in speziellen Fällen gegeben.

Suchen gute Approximation im allgemeinen Fall.

\rightsquigarrow Approximation der Form $\mathbf{A} \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \approx \mathbf{M} \mathbf{I}_N$

\rightsquigarrow Modifikation der Matrix \mathbf{B}

\rightsquigarrow Bandstruktur und arithmetische Komplexität erhalten

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$AD^*F^*B^* \approx MI_N$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$AD^*F^*B^* \approx MI_N \iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* f \approx f \quad \forall f \in \mathbb{C}^N$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AD}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \approx \mathbf{MI}_N &\iff \frac{1}{M} \mathbf{AD}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff \mathbf{A} \check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{D}^*\mathbf{F}^*\mathbf{B}^* \approx \mathbf{M}\mathbf{I}_N &\iff \frac{1}{M} \mathbf{A}\mathbf{D}^*\mathbf{F}^*\mathbf{B}^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff \mathbf{A}\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $\mathbf{A}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

$$\|\mathbf{M}\mathbf{A}\check{\mathbf{f}} - \mathbf{M}\mathbf{f}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{D}^*\mathbf{F}^*\mathbf{B}^* - \mathbf{M}\mathbf{I}_N\|_{\mathbb{F}} \|\mathbf{f}\|_2$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

$$\|MA\check{\mathbf{f}} - M\mathbf{f}\|_2 \leq \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_F \|\mathbf{f}\|_2$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \quad \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_F^2$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

$$\|MA\check{\mathbf{f}} - M\mathbf{f}\|_2 \leq \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}} \|\mathbf{f}\|_2$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{j=1}^N \|AD^*T_j \mathbf{b}_j - M\mathbf{e}_j\|_2^2$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

$$\|MA\check{\mathbf{f}} - M\mathbf{f}\|_2 \leq \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}} \|\mathbf{f}\|_2$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{j=1}^N \|AD^*T_j \mathbf{b}_j - M\mathbf{e}_j\|_2^2$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}(N^2 + M \log M)$$

Unterbestimmter Fall $M > N$

Annahme:

$$\begin{aligned}
 AD^*F^*B^* \approx MI_N &\iff \frac{1}{M} AD^*F^*B^* \mathbf{f} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N \\
 &\iff A\check{\mathbf{f}} \approx \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{C}^N
 \end{aligned}$$

Da $A\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ bedeutet dies $\check{\mathbf{f}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

\Rightarrow Rekonstruierbarkeit der Fourier-Koeffizienten \hat{f}_k

$$\|MA\check{\mathbf{f}} - M\mathbf{f}\|_2 \leq \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}} \|\mathbf{f}\|_2$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : B \text{ (2m+1)-sparse}}{\text{Minimiere}} \|AD^*F^*B^* - MI_N\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{j=1}^N \|AD^*T_j \mathbf{b}_j - M\mathbf{e}_j\|_2^2$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}(N^2 + M \log M)$$

\Rightarrow inverse NFFT & inverse adjungierte NFFT

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x)$$

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma M}\right),$$

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma M}\right),$$

also $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{B}^* \mathbf{f}$ und $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{g}}$.

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma M}\right),$$

also $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{B}^* \mathbf{f}$ und $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{g}}$. Setzen $\tilde{\mathbf{h}} \approx \hat{\mathbf{f}}$.

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma M}\right),$$

also $\tilde{g} = B^* f$ und $\tilde{h} = D^* F^* \tilde{g}$. Setzen $\tilde{h} \approx \hat{f}$.

$$\tilde{g} = B^* f = B^* A \hat{f} \approx B^* A \tilde{h} = B^* A D^* F^* \tilde{g}$$

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma M}\right),$$

also $\tilde{g} = B^* f$ und $\tilde{h} = D^* F^* \tilde{g}$. Setzen $\tilde{h} \approx \hat{f}$.

$$\tilde{g} = B^* f = B^* A \hat{f} \approx B^* A \tilde{h} = B^* A D^* F^* \tilde{g}$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \quad \|B^* A D^* F^* - I_{\sigma M}\|_F^2$$

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma_M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma_M}\right),$$

also $\tilde{g} = B^* f$ und $\tilde{h} = D^* F^* \tilde{g}$. Setzen $\tilde{h} \approx \hat{f}$.

$$\tilde{g} = B^* f = B^* A \hat{f} \approx B^* A \tilde{h} = B^* A D^* F^* \tilde{g}$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma_M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \quad \|B^* A D^* F^* - I_{\sigma_M}\|_F^2$$

$$\|F D A^* B - I_{\sigma_M}\|_F^2 = \sum_{l=-\frac{\sigma_M}{2}}^{\frac{\sigma_M}{2}-1} \|F D H_l b_l - e_l\|_2^2$$

Überbestimmter Fall $M < N$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m(x_j - x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}\left(\frac{l}{\sigma_M}\right) = \sum_{j=1}^N f_j \tilde{w}_m\left(x_j - \frac{l}{\sigma_M}\right),$$

also $\tilde{g} = B^* f$ und $\tilde{h} = D^* F^* \tilde{g}$. Setzen $\tilde{h} \approx \hat{f}$.

$$\tilde{g} = B^* f = B^* A \hat{f} \approx B^* A \tilde{h} = B^* A D^* F^* \tilde{g}$$

Optimierungsproblem:

$$\underset{B \in \mathbb{R}^{N \times \sigma_M} : B \text{ (} 2m+1 \text{)-sparse}}{\text{Minimiere}} \quad \|B^* A D^* F^* - I_{\sigma_M}\|_F^2$$

$$\|F D A^* B - I_{\sigma_M}\|_F^2 = \sum_{l=-\frac{\sigma_M}{2}}^{\frac{\sigma_M}{2}-1} \|F D H_l b_l - e_l\|_2^2$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{O}(N^2 M^2 + N^3 M)$$

Numerische Ergebnisse - quadratischer Fall

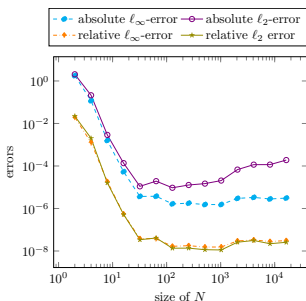
- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$

Numerische Ergebnisse - quadratischer Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$

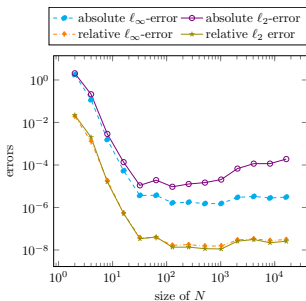


(a) $N = 2^c$, $c = 1, \dots, 14$,
 und $m = p = 4$.

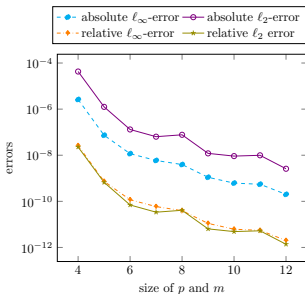
Numerische Ergebnisse - quadratischer Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$



(a) $N = 2^c$, $c = 1, \dots, 14$,
 und $m = p = 4$.



(b) $N = 1024$ und
 $m = p = c$, $c = 4, \dots, 12$.

Numerische Ergebnisse - unterbestimmter Fall

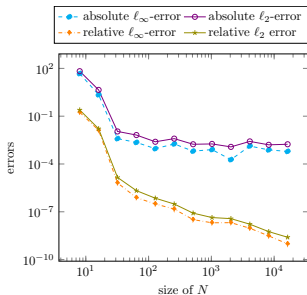
- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\mathbf{A}\check{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\mathbf{A}\check{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r}{N \|\mathbf{f}\|_r}$$

Numerische Ergebnisse - unterbestimmter Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r}{N \|\mathbf{f}\|_r}$$

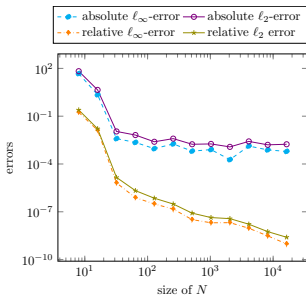


(a) $N = 2^c$, $c = 1, \dots, 12$,
 $M = 4N$ und $m = 4$.

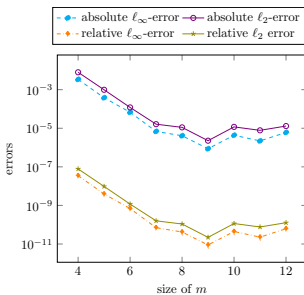
Numerische Ergebnisse - unterbestimmter Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_r}{N \|\mathbf{f}\|_r}$$



(a) $N = 2^c$, $c = 1, \dots, 12$,
 $M = 4N$ und $m = 4$.



(b) $N = 512$, $M = 2048$
 und $m = 4, \dots, 12$.

Numerische Ergebnisse - überbestimmter Fall

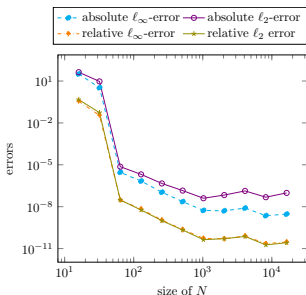
- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$

Numerische Ergebnisse - überbestimmter Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$

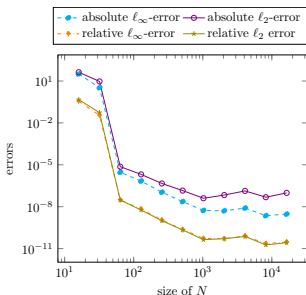


(a) $M = 2^c$, $c = 1, \dots, 12$,
 $N = 4M$ und $m = 4$.

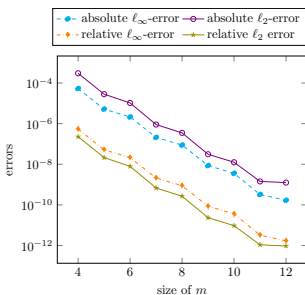
Numerische Ergebnisse - überbestimmter Fall

- trigonometrisches Polynom mit zufälligen Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k \in [1, 100]$
- verwackelte äquidistante Knoten
- absolute und relative Fehler pro Knoten, $r \in \{2, \infty\}$,

$$\frac{e_r^{\text{abs}}}{N} = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r \quad \text{und} \quad \frac{e_r^{\text{rel}}}{N} = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{f}}\|_r}{N \|\hat{\mathbf{f}}\|_r}$$



(a) $M = 2^c$, $c = 1, \dots, 12$,
 $N = 4M$ und $m = 4$.



(b) $N = 2048$, $M = 512$
 und $m = 4, \dots, 12$.

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$
 - iNFFT basierend auf der Faktorisierung **BFD**

↑
optimiert

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$
 - iNFFT basierend auf der Faktorisierung **BFD**
 - ↑
optimiert
 - schnelle Algorithmen der Komplexität $\mathcal{O}(M \log M + N)$

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$
 - iNFFT basierend auf der Faktorisierung **BFD**
 - ↑ optimiert
 - schnelle Algorithmen der Komplexität $\mathcal{O}(M \log M + N)$
 - Zusammenhang mit frame-theoretischem Ansatz

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$
 - iNFFT basierend auf der Faktorisierung **BFD**
 - ↑
optimiert
 - schnelle Algorithmen der Komplexität $\mathcal{O}(M \log M + N)$
 - Zusammenhang mit frame-theoretischem Ansatz
- K., Potts: **Direct inversion of the nonequispaced fast Fourier transform**
Preprint 2018, arXiv:1811.0533

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

- Neue direkte Methode für den Fall $N = M$
 - iNFFT basierend auf Lagrange-Interpolation
 - schnelle Algorithmen mittels schneller Summation
 - Komplexität $\mathcal{O}(N \log N)$
- Software verfügbar unter www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft/
- Neue direkte Methode für den allgemeinen Fall $N \neq M$
 - iNFFT basierend auf der Faktorisierung **BFD**
 - ↑ optimiert
 - schnelle Algorithmen der Komplexität $\mathcal{O}(M \log M + N)$
 - Zusammenhang mit frame-theoretischem Ansatz
- K., Potts: **Direct inversion of the nonequispaced fast Fourier transform**
Preprint 2018, arXiv:1811.0533

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!