Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 13. Juni 2003

Optimierung 1
Übung 9

1. Stelle den Epigraphen der Funktionen e^x, $-\log x$ und $-\sum_i \log(a_i^T x - b_i)$ als Schnitt abgeschlossener Halbräume dar.

2. Zeige den Satz über starke Dualität Linearer Programme (S.I.7) für das primale LP $\max c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ und das duale $\min b^T y$ s.t. $A^T y \geq c$ mittels des Farkas-Lemmas (L.II.22) angewandt auf das System (Hinweis: nutze die schwache Dualität)

$$\begin{array}{cccll} & Ax & -b\tau & \leq & 0 \\ -A^T y & & +c\tau & \leq & 0 \\ b^T y & -c^T x & & \leq & 0 \\ -Iy & & & \leq & 0 \\ & -Ix & & \leq & 0 \\ & & \tau & > & 0 \end{array}$$

3. Folgende Ungleichungskette verwendet abwechselnd schwache Dualität und die Relation $\min\{f(x) : x \in X\} \leq \max\{f(x) : x \in X\}$.

$$\begin{array}{rcl} \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} & \leq & \min\{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\} \\ & \leq & \max\{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\} \\ & \leq & \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} \\ & \leq & \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} \\ & \leq & \min\{b^T y : A^T y \leq c, y \leq 0\} \\ & \leq & \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \leq 0\} \\ & \leq & \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \\ & \leq & \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \end{array}$$

   Folglich gilt in der gesamten Kette Gleichheit. Insbesondere bedeutet dies, dass $c^T x$ auf der gesamten primal zuläsigen Menge konstant ist und $b^T y$ ebenso auf der gesamten dual zulässigen Menge, wobei die Daten A, b, c völlig beliebig sind. Wo steckt der Fehler?

4. Ein konvexer Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *spitz*, falls $K \cap -K = \{0\}$. Zeige: Durch einen spitzen Kegel wird mit $a \geq_K b :\Leftrightarrow a - b \in K$ eine Partialordnung (Halbordnung) auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Insbesondere sind $\mathbb{R}^n_+$, $\mathcal{Q}^n$ und $\mathcal{S}^n_+$ spitz, dies begründet die Schreibweisen $x \geq 0$, $x \geq_{\mathcal{Q}} 0$, $X \succeq 0$.

5. Eine Optimierungsaufgabe der Form $\min \langle C, X\rangle$ s.t.$\mathcal{A}X = b, X \succeq 0$ mit $C \in \mathcal{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}X = (\langle A_1, X\rangle, \ldots, \langle A_m, X\rangle)^T$ für gegebene $A_i \in \mathcal{S}^n$, $i = 1, \ldots, m$ heißt *semidefinites Programm*. Zeige: jedes lineare Programm und jedes semidefinite Programm in mehreren Matrixvariablen lässt sich als semidefinites Programm mit einer Matrixvariablen darstellen.

6. Stelle die Normminimierungsaufgaben $\min_x \|Ax - b\|_1$ ($\|y\|_1 = \sum_i |y_i|$), $\min_x \|Ax - b\|_2$ ($\|y\|_2 = \sqrt{\sum_i y_i^2}$) und $\min_x \|Ax - b\|_\infty$ ($\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$) als lineare Programme über Kegeln dar.