Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 6. Juni 2003

Optimierung 1
Übung 8

1. Zeige: Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und C_2 kompakt, dann ist $C_1 - C_2$ abgeschlossen. Gib ein Beispiel dafür, dass i.A. $C_1 - C_2$ nicht abgeschlossen ist, falls keine der beiden Mengen kompakt ist.

2. Bestimme die Polarkegel zu den Kegeln unter 1. in Übung 7 (für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ ist das kanonische Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} B^H A = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{b}_{ij}$, für $A, B \in \mathcal{S}^n$ entsprechend $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$). Hinweis: Nutze für den symmetrischen und hermiteschen Fall die Spektralzerlegung und $\langle A, BC\rangle = \langle AC^H, B\rangle$.

3. Seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige: der Polarkegel zu $K = \operatorname{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$ ist $K^\circ = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x_j\rangle \le 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$.

4. Sei K ein konvexer, abgeschlossener Kegel. Zeige unter Verwendung von Satz II.15 , dass für $x \in \mathbb{R}^n$ immer $p_K(x) + p_{K^\circ}(x) = x$ gilt und beweise den Satz von Moreau:
   Sei K konvex und abgeschlossen. Dann ist für $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:
   (i) $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\circ$ und $\langle x_1, x_2\rangle = 0$,
   (ii) $x_1 = p_K(x)$ und $x_2 = p_{K^\circ}(x)$.

5. Lineare Programme lassen sich leicht zu linearen Programmen über Kegeln verallgemeinern, indem $x \in \mathbb{R}^n_+ (x \ge 0)$ durch $x \in K$ für einen konvexen Kegel K ersetzt wird, also etwa $\min \langle c, x\rangle$ s.t. $Ax = b$, $x \in K$. Zeige, dass für positiv definites $Q \in \mathcal{S}^n$, $q \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$ die quadratische Nebenbedingung $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + q^T x + d \le 0$ eine konvexe Menge beschreibt und stelle diese als zulässige Menge eines linearen Programms über dem Kegel $\mathcal{Q}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ dar (Hinweis: setze für die neuen Variablen $(y_0, \bar{y}^T)^T \in \mathcal{Q}^{n+1}$ $\bar{y} = Q^{\frac{1}{2}} x + h$ mit geeignetem h, wobei $Q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} = Q$).

6. Sei $D = (V, E)$ ein Digraph, für $E' \subset E$, $x \in \mathbb{R}^E$ bezeichne $x(E') = \sum_{e\in E'} x_e$, und für $S \subset V$ bezeichne $\delta^-(S) = \{(u, v) \in E : u \in S \setminus V, v \in S\}$. Zeige, dass die Menge
$$\begin{aligned} R = \quad \{x \in \{0,1\}^{|E|} : \quad & x(\delta^+(\{v\})) = x(\delta^-(\{v\})) = 1 \text{ für } v \in V, \\ & x(\delta^+(S)) \ge 1 \text{ für } S \subset V \text{ mit } 2 \le |S| \le |V| - 2\} \end{aligned}$$
   die Menge der charakteristischen Vektoren von Rundreisen in D beschreibt. Erstelle damit für das TSP mit Kosten $c \in \mathbb{R}^E$ ein lineares Programm mit Ganzzahligkeitsbedingungen und gib die Anzahl der Nebenbedingungen an. Wenn man die Ganzzahligkeitsbedingungen fallen lässt, wie könnte man das entstehende LP auch für große Graphen lösen?