Technische Universität Chemnitz Chemnitz, 30. Mai 2003
Prof. Dr. C. Helmberg

Optimierung 1
Übung 7

1. Zeige die Konvexität folgender Kegel, bestimme ihr Inneres und ihren Rand:
   (a) nichtnegativer Orthant $\mathbb{R}^n_+$ (kurz $x \geq 0$)
   (b) quadratischer Kegel $\mathcal{Q}^n = \{x = (x_0, \bar{x}^T)^T : \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, x_0 \geq \|x\|\}$ (kurz $x \geq_{\mathcal{Q}} 0$)
   (c) symmetrische positiv semidefinite Matrizen $\mathcal{S}^n_+ = \{X \in \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} : v^T X v \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n\}$ (kurz $X \succeq 0$) (man verwendet $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ statt $\mathbb{R}^{n \times n}$, weil das obere Dreieck der Matrix zur Spezifikation ausreicht)
   (d) hermitesche positiv semidefinite Matrizen $\{X \in \mathbb{C}^{\binom{n+1}{2}} : X^H = X, v^H X v \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{C}^n\}$ (auch $X \succeq 0$)

2. Stelle folgende Probleme als maximale Fluss Probleme von einem Knoten s zu einem Knoten t dar:
   (a) Maximum Matching in bipartiten Graphen
   (b) Max-Flow mit mehreren Quellen $s_1, \ldots, s_k$ und Senken $t_1, \ldots, t_k$.

3. Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ gegeben, die Summe aller ihrer Element sei ganzzahlig. Finde einen Algorithmus, der die Elmenete von A so auf ganze Zahlen rundet, dass der Rundefehler in jedem Element, in jeder Zeilen- und Spaltensumme kleiner gleich eins ist, die Summe aller Elemente erhalten bleibt und die Summe der Absolutwerte der Rundefehler minimiert wird.

4. Es sei ein Digraph $D = (V, E)$ mit Kantenlängen c_e für $e \in E$ gegeben und D sei stark zusammenhängend (jeder Knoten sei von jedem Knoten aus über einen gerichteten Weg erreichbar). Formuliere die Aufgabe, für einen Knoten $v \in V$ die jeweils kürzesten Wege zu allen anderen Knoten aus V zu finden, als min-cost-flow Problem.

5. Bestimme in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ die maximale Anzahl kreuzungsfreier Wege (ohne gemeinsame innere Knoten) zwischen zwei Knoten $s, t \in V$, $s \neq t$ mit dem max-flow Algorithmus (Hinweis: spalte jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ in zwei Knoten v_{in} und v_{out} und setze eine Kante zwischen beide). Beweise damit den Satz von Menger: In einem Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Anzahl knotendisjunkter Wege (ohne gemeinsame Knoten) zwischen zwei Knotenmengen $A, B \subset V$ (ein Endknoten in A und einer in B; ein $v \in A \cap B$ zählt als ein A-B-Weg) gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenmenge $S \subset V$, so dass es keinen S vermeidenden A-B-Weg gibt.