Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 23. Mai 2003

Optimierung 1
Übung 6

1. Die *abgeschlossene konvexe Hülle* $\overline{\text{conv}}\, S$ einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen konvexen Mengen $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $S \subset C$. Zeige: Die abgeschlossene konvexe Hülle von S ist der Abschluss der konvexen Hülle von S ($\overline{\text{conv}}\, S = \text{cl}\,\text{conv}\, S$). Gib ein Beispiel einer abgeschlossenen Menge S an, deren konvexe Hülle *nicht* abgeschlossen ist.

2. Die affine Hülle einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist der kleinste affine Unterraum, der C enthält, also $\text{aff}\, C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i\}$. Die Dimension $\dim C$ einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist die Dimension von $\text{aff}\, C$ (bzw. des parallelen Unterraums). Bestimme affine Hülle und Dimension von

   (a) $C = \text{conv}\{e_i : i = 1 \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n$,

   (b) $C = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei bekannt sein soll, dass $e \in C$ (mit $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$),

   (c) $C = \{x \geq 0 : Ax = b\} \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Das *relative Innere* $\text{ri}\, C$ einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $\text{ri}\, C = \{x \in C : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap \text{aff}\, C \subset C\}$, also die Menge der Punkte aus C, die innerhalb des affinen Unterraums noch eine Kugelumgebung in C besitzen. Zeige: Für $x \in \text{cl}\, C$ und $y \in \text{ri}\, C$ ist die halb offene Strecke $(x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha) y : \alpha \in [0, 1)\}$ in $\text{ri}\, C$ enthalten.

4. Die Produktionstandorte A, B, C haben 1400, 2600 und 2900 Packungen Mozartkugeln auf Lager. Es sollen die Verkauffstellen a, b, c, d, e, f, g jeweils 900, 1200, 600, 400, 1700, 1100, 1000 Packungen zugestellt bekommen. Die Transportkosten sind dabei

von\ nach	a	b	c	d	e	f	G
A	39	14	11	14	16	82	8
B	27	9	12	9	26	95	17
C	24	14	17	13	28	99	20

   Bestimme (ganzzahlig) wieviele Packungen von wo wohin transportiert werden sollen.

5. Im *Traveling Salesman Problem*(TSP) sind n Städte mit den paarweisen (nicht unbedingt symmetrischen) Distanzen gegeben. Gesucht ist eine Rundreise durch alle Städte möglichst kurzer Länge, ohne dabei eine Stadt zweimal zu besuchen. Zeige, wie man eine untere Schranke für die Länge einer Rundreise mittels gewichtetem bipartiten Matching erhalten kann (Hinweis: teile jeden Knoten in eintreffenden und ausgehenden Knoten). Berechne dies für die Distanzmatrix auf 6 Städten:

$$\begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 4 & 1 & 11 \\ 9 & - & 7 & 6 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & - & 4 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & - & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 9 & - & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 12 & 7 & - \end{bmatrix}$$