Technische Universität Chemnitz — Chemnitz, 9. Mai 2003
Prof. Dr. C. Helmberg

Optimierung 1
Übung 4

1. Die (orthogonale) *Projektion* eines Punktes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ auf eine **abgeschlossene** konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $C \neq \emptyset$ ist der Punkt $\hat{x} \in C$ mit $\|\hat{x} - \bar{x}\| = \inf\{\|x - \bar{x}\| : x \in C\}$ ($\|\cdot\|$ sei die euklidische Norm). Zeige, dass die Projektion wohldefiniert ist (und somit eine Funktion $\text{proj}_C(\cdot) : \mathbb{R}^n \to C$ definiert). Bestimme eine explizite Formel für die Projektion auf einen linearen Unterraum, der durch $\{A^T y : y \in \mathbb{R}^n\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \leq n$, voller Zeilenrang) gegeben ist (Hinweis: löse das Optimierungsproblem $\frac{1}{2}\|A^T y - \bar{x}\|^2$), und leite daraus eine explizite Formel für die Projektion auf $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ ab.

2. Zeige: Sind C_i konvexe Mengen in $\mathbb{R}^{n_i}$ für $i = 1, \ldots, k$, dann ist auch das direkte Produkt $C_1 \times \cdots \times C_k$ eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$.

3. Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ und $D \subset \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung (linear plus konstanter Vektor). Zeige: Das Bild $A(C)$ und das Urbild $\overset{-1}{A}(D)$ sind konvexe Mengen. Folgere daraus:

   (a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ konvex, insbesondere also auch $-C$.

   (b) Für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ konvex ist die *Minkowski Summe* $C_1 + C_2 := \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$ und allgemeiner für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ auch $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = \{\alpha_1 x + \alpha_2 y : x \in C_1, y \in C_2\}$ konvex.

   (c) Die (orthogonale) Projektion einer konvexen Menge auf einen linearen Unterraum $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ ist konvex.

4. Gib ein lineares Programm an, dessen zulässige Menge (bei geeigneter Projektion auf einen Teil der Variablen) die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ beschreibt.

5. Wie lautet das Duale zu folgenden linearen Programmen (versuche die Herleitung möglichst direkt, ohne Umwege über Normalformen):

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = a \\ & Bx \leq b \\ & Dx \geq d \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

6. Erweitere den primalen Simplexalgorithmus so, dass er effizient lineare Programme der Form $\min c^T x$ s.t. $Ax = b, l \leq x \leq u$ mit $l, u \in \mathbb{R}^n$ bearbeiten kann. Wie kann man ein Problem $\min c^T x$ s.t. $a \leq Ax \leq b, l \leq x \leq u$ auf diese Form bringen?