Technische Universität Chemnitz — Chemnitz, 2. Mai 2003
Prof. Dr. C. Helmberg

Optimierung 1
Übung 3

1. Für Punkte $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ heißt $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ *Konvexkombination* der Punkte $x_1, \dots, x_k$. Zeige: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex genau dann wenn sie alle Konvexkombinationen ihrer Elemente enthält.

2. Die *konvexe Hülle* einer Menge $S \in \mathbb{R}^n$ ist die kleinste (bzgl. Mengeninklusion) konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $S \subset C$ und wird mit $\operatorname{conv}(S)$ bezeichnet. Zeige: Für $S \subset \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von S die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus S,
$$\operatorname{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1, x_i \in S \text{ und } \alpha_i \geq 0 \text{ für } \; i = 1, \dots, k \right\}.$$

3. Zeige: Wird $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{cx_1^2 + x_2^2}{2}$ für gegebenes $0 < c < 1$ mit dem steilsten Abstiegsverfahren und exaktem Line-Search beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = (1, c)$ berechnet, dann erhält man die Punktfolge
$$x^{(k)} = (q^k, (-1)^k c q^k)^T \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$
mit $q = \frac{1-c}{1+c}$. Wieviele Iterationen benötigt man, um für $c = 10^{-3}$ das Minimum auf 6 Stellen genau zu bestimmen?

4. Implementiere den (primalen) Simplexalgorithmus (Wahl der Pivotspalte: negativste reduzierte Kosten) für min $c^T x$ s.t. $cdAx = b, x \geq 0$ in Matlab (Aufruf: [x,y,z,basis]=psimplex[A,b,c,basis], **Abgabe des m-Files per email bis 16. Mai**) und löse damit das Mozartproblem sowie
$$\begin{array}{lrrrrl}
\min & -10x_1 & +57x_2 & +9x_3 & +24x_4 & \\
\text{s.t.} & 0.5x_1 & -5.5x_2 & -2.5x_3 & +9x_4 & \leq 0 \\
 & 0.5x_1 & -1.5x_2 & -0.5x_3 & +x_4 & \leq 0 \\
 & x_1 & & & & \leq 1 \\
 & x \geq 0 & & & &
\end{array}$$

5. Als *Simplex-Tableau* (zur Berechnung von Hand entwickelt) bezeichnet man das Zahlenschema $\begin{array}{|c|c|}\hline c_B^T A_B^{-1} b & c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \\ \hline A_B^{-1} b & A_B^{-1} A_N \\ \hline \end{array}$. Zeige: Ein Basisaustauschschritt (Pivot-Schritt) mit Pivot-Element (i, j) erfolgt durch
   - Das Pivot-Element wird invertiert.
   - Die restliche Pivot-Zeile wird durch das Pivotelement dividiert.
   - Die restliche Pivot-Spalte wird durch minus Pivotelement dividiert.
   - Sonst wird je Element Zeile mal Spalte durch Pivot abgezogen.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline z & p & \\ \hline a & s & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \frac{z}{p} & \frac{1}{p} & \\ \hline a - \frac{zs}{p} & -\frac{s}{p} & \\ \hline \end{array}$$

Löse mit diesem Verfahren das Beispiel aus der vorigen Übung mit der Spalten-Auswahlregel der negativsten reduzierten Kosten und der Regel von Bland.