Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 4. Juli 2003

# Optimierung 1
# Übung 12

1. Weise nach, dass die folgenden linearen Programme über konvexen Kegeln durch Lagrangedualität miteinander verbunden sind,

$$\text{(P)}\quad \min\ \langle c,x\rangle \text{ s.t. } Ax=b,\ x\in K \qquad \text{(D)}\quad \max\ \langle b,y\rangle \text{ s.t. } A^Ty+z=c,\ z\in K^*.$$

   Dabei ist $K^* := -K^\circ$ der *duale Kegel* zum konvexen Kegel $K$.

2. Ein (konvexes) quadratisches Programm hat die Form

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx+c^Tx \\ \text{s.t.} & Ax\geq b \\ & x \text{ frei} \end{array}$$

   mit $Q\in\mathcal{S}^n_+$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b,c\in\mathbb{R}^n$. Zeige, dass das Lagrange-Duale durch

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}x^TQx+c^Tx-\lambda^T(Ax-b) \\ \text{s.t.} & Qx+c-A^T\lambda=0 \\ & \lambda\geq 0 \end{array}$$

   gegeben ist und starke Dualität erfüllt. Für $Q$ positiv definit kann man $x$ eliminieren und erhält so ein besonders einfaches duales Programm. Wie sieht dieses aus und lässt sich aus dessen Optimallösung die primale Optimallösung ermitteln?

3. Zeige: Der maximale Eigenwert $\lambda_{\max}() : \mathcal{S}^n\to\mathbb{R}$ ist eine konvexe Funktion (Hinweis: Nutze die Rayleigh-Ritz Charakterisierung: $\lambda_{\max}(X)=\max_{\|v\|=1} v^TXv=\max_{\|v\|=1}\left\langle X,vv^T\right\rangle$) und $\partial\lambda_{\max}(X)=\operatorname{conv}\{vv^T : \|v\|=1, v^TXv=\lambda_{\max}(X)\}$ für $X\in\mathcal{S}^n$ (Hinweis: für $Y=X-\gamma vv^T$ mit $\|v\|=1$, $\gamma>0$ gilt nach Rayleigh-Ritz $\lambda_{\max}(Y)\leq\lambda_{\max}(X)$; zeige damit zuerst, dass Subgradienten $S\in\mathcal{S}^n$ positiv semidefinit sein müssen. Nun ist nur noch $\langle I,S\rangle=\sum\lambda_i=1$ nachzuweisen).

4. Stelle den maximalen Eigenwert einer Symmetrischen Matrix $A$ als Optimallösung eines semidefiniten Programms dar (nütze B.II.28).

5. Zeige den folgenden Satz über das sogenannte Schur-Komplement: Sei $A\in\mathcal{S}^m_+$ positiv definit, $C\in\mathcal{S}^n$, und $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}\succ 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad C-B^TA^{-1}B\succ 0$$

   und

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}\succeq 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad C-B^TA^{-1}B\succeq 0.$$

   (Hinweis: Ist $H$ regulär, dann ist $X$ positiv definit genau dann wenn $H^TXH$ positiv definit ist. Wähle $H$ geeignet um eine passende Blockdiagonalform zu erzielen).