Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 27. Juni 2003

Optimierung 1
Übung 11

1. Zeige zuerst, dass für K_1, K_2 konvexe Kegel mit $K_1 \subseteq K_2$ stets $K_1^\circ \supseteq K_2^\circ$ gilt und dann, dass für zwei nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen C_1 und C_2 mit $x \in C_1 \cap C_2$ immer $T_{C_1 \cap C_2}(x) \subseteq T_{C_1}(x) \cap T_{C_2}(x)$ und $N_{C_1 \cap C_2}(x) \supseteq \operatorname{conv}(N_{C_1}(x) \cup N_{C_2}(x)) = N_{C_1}(x) + N_{C_2}(x)$. Gib ein Beispiel für C_1 und C_2 an, wo Gleichheit nicht erfüllt ist.

2. Sei $A \in R^m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex, und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(Ax + b)$. Zeige: f ist konvex und $\partial f(x) = A^T \partial g(Ax + b)$ (gehe vor wie in Übung 10.6).

3. Bestimme für die gegebenen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Menge der aktiven Indices $I(x)$ für $g(x) = \max_i g_i(x)$ sowie $\mathbb{R}^+ \partial g(x)$ und $N_{S_0(g)}(x)$ ($S_0(g)$ ist die zulässige Menge $\mathcal{X} = \{x : g_i(x) \leq 0\}$).

   (a) $\mathbb{R}^2$: $g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 6$, $g_2(x) = -x2 - 3$, $g_3(x) = x_1 - 4$, $g_4(x) = -x_1 + 2x_2 - 8$, $g_5(x) = -x_1 - x_2 - 4$, $g_6(x) = x_1 - x_2 - 3$, $\bar{x} = (4, 1)^T$

   (b) $\mathbb{R}^3$: $g_1(x) = \langle x, x \rangle - 9$, $g_2(x) = x_1 + 3x_2 - x_4 - 12$, $g_3(x) = -x_1 - 2$, $g_4(x) = -x_2 + 3$, $\bar{x} = (0, 3, 0)^T$

   (c) $\mathbb{R}^3$: $g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1$, $g_2(x) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 1$, $g_3(x) = x_3 + 1$, $g_4(x) = -x_3 - 2$, $\bar{x} = (2, 0, -1)^T$

   (d) $\mathbb{R}^3$: $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2$, $g_2(x) = -x_1 + x2 + 2$, $g_3(x) = -x2$, $g_4(x) = 2x_2 + x_3 + 1$, $g_5(x) = 4x_1 - x_3 - 10$, $\bar{x} = (2, 0, -1)^T$ (vergleiche $\mathcal{X}$ zur vorherigen Aufgabe)

4. Sei C eine konvexe Menge und F eine Seitenfläche von C. Zeige: Eine Seitenfläche E von F ist eine Seitenfläche von C. Gilt das auch, wenn man überall Seitenfläche durch exponierte Seitenfläche ersetzt?

5. Zeige: $\mathcal{S}_+^n = \operatorname{cone}\{vv^T : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}$ und für jede orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ($P^T P = I_r$) ist der Kegel $\{PVP^T : V \in \mathcal{S}_+^r\}$ eine Seitenfläche von $\mathcal{S}_+^n$ (Hinweis: Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{S}_+^n$ mit $\alpha A + (1 - \alpha)B$ alle Vektoren $v \in \{u : P^T u = 0\}$ im Eigenraum zum Eigenwert 0 von A und B liegen müssen, also alle Eigenvektoren zu Nichtnulleigenwerten in $\{Pu : u \in \mathbb{R}^r\}$ liegen müssen).