Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 20. Juni 2003

Optimierung 1
Übung 10

1. Zeige: Ein Punkt x ist zulässige Basislösung eines linearen Programms genau dann, wenn er eine Ecke der zulässigen Menge ist.

2. Zeige: Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Punktmenge und $c \in \mathbb{R}^n$, dann ist
$$\min_{p \in P} c^T p = \min_{x \in \operatorname{conv} P} c^T x$$
und jeder Extrempunkt der optimalen Seitenfläche des konvexen Problems (der konvexen *Relaxierung*) ist Lösung des ursprünglichen diskreten Problems.

3. Zeige:
   (a) Ein konvexer Kegel hat höchstens einen Extrempunkt und alle Seitenflächen sind wieder konvexe Kegel (die kleinsten aussagekräftigen Seitenflächen sind daher die *Extremalstrahlen*).
   (b) Die Seitenflächen von $\mathbb{R}^n_+$ sind $\emptyset, \{0\}$ und für jede Teilmenge $K \subset \{1, ..., n\}$ der Kegel $F_K = \operatorname{cone}\{e_i : i \in K\}$.

4. Sei ein konvexes Polyeder $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leq b_i \text{ mit } i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und für $x \in C$ sei $I(x) := \{i : \langle a_i, x\rangle = b_i\}$ die (Index-)Menge der *aktiven Nebenbedingungen.* Zeige: $T_C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, d\rangle \leq 0 \text{ für } i \in I(x)\}$ und $N_C(x) = \operatorname{cone}\{a_i : i \in I(x)\}$.

5. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Die Indikator-Funktion $\imath_C \in \operatorname{Conv}\mathbb{R}^n$ hat den Wert $\imath_C(x) = 0$ für $x \in C$ und ∞ sonst. Bestimme das Subdifferential $\partial\imath_C(x)$ für $x \in \operatorname{dom} \imath_C$.

6. Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Dann ist $\partial(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 \partial f(x) + \lambda_2 \partial g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Hinweis: Nütze S.II.40 und die Eigenschaft, dass zwei kompakte konvexe Mengen mit den gleichen Stützhyperebenen gleich sind, untersuche also $\forall d \in \mathbb{R}^n$ $\max_{s \in C} \langle s, d\rangle$ für beide Mengen).