Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 11. April 2003

Optimierung 1
Übung 1

1. Bestimme Gradienten und Hessematrix folgender Funktionen und zeichne die Funktionen auf den angegebenen Gebieten mittels der Matlab-Funktionen `mesh` und `contour` (es müssen geeignete Niveaus vorgegeben werden; Beispiel in `http://www.tu-chemnitz.de/~helmberg/opt_s03`).

   (a) $f(x) = x^T Qx + b^T x + d$ für $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d = 3$ und $Q =$
   (i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2.5 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1.5 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2.5 \end{pmatrix}$, (iv) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -2.5 \end{pmatrix}$
   auf $[-10, 10] \times [-10, 10]$.

   (b) $100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ (*Rosenbrockfunktion*) auf $[-1, 2] \times [-1, 3]$.

2. Bestimme für folgende Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, für welche Parameter ($a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $S \subset \mathbb{R}^n$) sie auf ihrem Definitionsgebiet konvex, konkav oder weder noch sind:

   (a) $f(x) = a^T x + b$
   (b) $f(x) = x^T Qx + a^T x + b$
   (c) $f(x) = \log(b - a^T x)$
   (d) $f(x) = \|x - a\|^2$
   (e) $\imath_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in S \\ \infty & x \notin S \end{cases}$ *Indikatorfunktion* einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$

3. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei konvexe Funktionen. Zeige, dass αf für $\alpha \geq 0$ und $f + g$ wieder konvexe Funktionen sind. Folgere daraus, dass jede nichtnegative Linearkombination konvexer Funktionen konvex ist.

4. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : C \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *quasikonvex* falls $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ $\forall \alpha \in (0, 1)$. Zeige: f ist quasikonvex genau dann, wenn die Niveaumengen $S_r(f) = \{x \in C : f(x) \leq r\}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ konvex sind.

5. Sei U eine Umgebung eines konvexen Gebiets $C \subset \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Zeige:

   (a) Ist f auf U stetig differenzierbar, dann gilt:
   f ist konvex auf $C \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)$ $\forall x, y \in C$.

   (b) Ist f auf U zweimal stetig differenzierbar, dann gilt:
   f ist konvex auf $C \Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in C$.

6. Erprobe AMPL mit den Dateien `steel.mod` und `steel.dat` (zu finden unter `http://www.tu-chemnitz.de/~helmberg/opt_s03`). Modifiziere die Daten so, dass auch Stahlplatten eingeplant werden (Gewinn: 29$/t, Produktion: 160 t/h, Maximum: 3500 t). Erweitere dann das Modell um Mindestproduktionsmengen (Brammen: 1000, Rollen: 500, Platten: 750). Sende die Dateien, wenn sie lokal funktionieren, unter NEOS zu verschiedenen Solvern (z.B. LOQO, MINOS, MOSEK).