Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

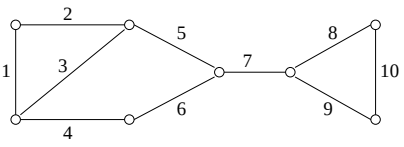
Chemnitz, 10. Dezember 2002
Abgabe: 17. Dezember 2002

# Einführung in die Diskrete Mathematik
# Übung 9

1. (3 Punkte)
   Zeige: Sei $E$ eine endliche Menge, und $E_1, \ldots, E_k$ seien nicht-leere Teilmengen von $E$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$. Seien $b_1, \ldots, b_k$ nicht-negative ganze Zahlen, dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F \cap E_i| \leq b_i, i = 1, \ldots, k\})$ ein Matroid (genannt *Partitionsmatroid*). Insbesondere sind beide Matroide aus Übung 8.4 Partitionsmatroide.

2. (5 Punkte)
   Ein (gerichteter) Weg in einem Digraphen $D = (V, A)$ heißt hamiltonscher Weg, wenn er alle Knoten aus $V$ besucht. Formuliere das Problem, in einem Digraphen $D = (V, A)$ einen hamiltonschen Weg zu finden, als die Suche nach einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität im Schnitt dreier Matroide.

3. (5 Punkte)
   Sei $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ eine Grundmenge und $A_i \in 2^T$, $i = 1, \ldots, m$ (nicht notwendigerweise $A_i \neq A_j$). Falls für eine Unterfamilie $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ eine injektive Abbildung (*A*uswahlfunktion) $\varphi : I \to \{1, \ldots, n\}$ mit $t_{\varphi(i)} \in A_i$ existiert, heißt $T_I = \{t_{\varphi(i)} : i \in I\}$ *Transversale* oder *System von verschiedenen Repräsentanten* der Unterfamilie $\mathcal{A}_I$. Zeige: $(T, \mathcal{F} = \{T_I : \exists I \subseteq \{1, \ldots, m\} : T_I$ ist Transversale von $\mathcal{A}_I\})$ ist ein Matroid (das *Transversalmatroid*). Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen $(V = \mathcal{A}_{\{1,\ldots,m\}} \cup T, E = \{\{A_i, t_j\} : t_j \in A_i\})$; Transversalen entsprechen Matchings; falls $X, Y \in \mathcal{F}$ mit $|X| < |Y|$, dann enthält die Vereinigung der entsprechenden Matchings einen alternierenden Weg, mit dem $X$ vergrößert werden kann.

4. (3 Punkte)
   Auf $m$ freie Stellen bewerben sich $n$ Personen. Jede Person ist nur für eine Teilmenge der Stellen geeignet, hat aber einen stellenunabhängigen Wert für den Betrieb. Entwerfe einen Greedy-Algorithmus über einem Unabhängigkeitssystem für das Problem, eine Besetzung mit maximalem Wert zu finden. Welche Gütegarantie kann man erzielen?

5. (4 Punkte)
   Gib das System der Kreise und das System der Cokreise des folgenden Graphen an: