Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 12. November 2002
Abgabe: 19. November 2002

Einführung in die Diskrete Mathematik
Übung 5

1. (3+3+3 Punkte)
   Beweise die folgenden Gleichungen:

   (a) $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$,

   (b) Falls $f(n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$,

   (c) $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$.

2. (2 Punkte)
   Sei $f(n) = n^2$ (n gerade) und $f(n) = 2n$ (n ungerade). Zeige: $f(n) = O(n^2)$, aber nicht $f(n) = o(n^2)$ oder $n^2 = O(f(n))$.

3. (2 Punkte)
   Sei $T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \lg n$. Zeige (für geeignete Zweierpotenzen) $T(n) = O(\lg n \lg\lg n)$.

4. (2 Punkte)
   Angenommen, wir haben einen Algorithmus, der für eine Eingabe der Länge n, n Schritte aufweist, wobei der i-te Schritt i^2 Operationen benötigt. Zeige, dass die Laufzeit des Algorithmus $O(n^3)$ ist.

5. (2+3 Punkte)
   Die übliche Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen A und B erfordert $\Theta(n^3)$ Flops (Fließkommaoperationen '$*$' und '$+$'), insbesondere 8 Multiplikationen für $n = 2$. Die folgende Methode von Strassen benötigt nur 7 Multiplikationen.
   Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Zeige, dass die Elemente von AB eine Summe von Termen $\pm m_i$ ist, wobei $m_1 = (a+d)(\alpha+\delta)$, $m_2 = (c+d)\alpha$, $m_3 = a(\beta-\delta)$, $m_4 = d(\gamma-\alpha)$, $m_5 = (a+b)\delta$, $m_6 = (a-c)(\alpha+\beta)$, $m_7 = (b-d)(\gamma+\delta)$. Wieviele Additionen/Subtraktionen benötigt die normale Berechnung, wieviele Strassens Methode? Finde eine Methode, die $\Theta(n^{\lg 7})$ Flops für das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen benötigt. Hinweis: Halbiere die Matrizen und verwende Rekursion mit $n = 2$ als Start.