Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg

Chemnitz, 29. Oktober 2002
Abgabe: 5. November 2002

Einführung in die Diskrete Mathematik
Übung 3

1. (2 Punkte)
   Die Zufallszahl X nehme nur die Werte 0 und 1 an. Zeige
   $$VX = EX \cdot E(1 - X).$$

2. (3+2 Punkte)
   Die Felder eines 4×7 Schachbretts werden auf irgendeine Weise mit weiß und schwarz gefärbt. Zeige, dass es immer ein Rechteck gibt, dessen Ecken gleich gefärbt sind. Stimmt dies auch für ein 4×6 Schachbrett?

3. (3+2 Punkte)
   Beweise Markovs Ungleichung: Sei X eine Zufallsvariable, die nur Werte ≥ 0 annimmt, dann gilt $p(X \geq \alpha) \leq \frac{EX}{\alpha}$ für $\alpha \geq 0$. Folgere daraus Tschebyscheffs Ungleichung: $p(|X - EX| \geq \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha^2}$ für eine Zufallsvariable X und $\alpha \geq 0$.

4. (2 Punkte)
   Schätze mit Hilfe der vorigen Übung die Wahrscheinlichkeit ab, dass eine Permutation $k+1$ Fixpunkte hat (alle Permutationen gleichwahrscheinlich).

5. (4+2 Punkte)
   Zeige den Satz von Ramsey: Es seien k, l natürliche Zahlen ≥ 2. Dann gibt es eine kleinste Zahl $R(k, l)$, genannt Ramsey Zahl, so dass Folgendes gilt: Treffen einander $n \geq R(k, l)$ Personen, so gibt es immer k, die einander alle gegenseitig kennen, oder l, die einander paarweise nicht kennen. Hinweis: $R(k, 2) = k$, $R(2, l) = l$, für alle k, l. Zeige nun $R(k, l) \leq R(k-1, l)+R(k, l-1)$ und schließe den Satz mit Induktion. Folgere daraus $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.