TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Elektrodynamik

Dr. E. Fromm - SS 2007

Weitere Informationen auf http://www.tu-chemnitz.de/~doto/

Chemnitz, 4. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrische Felder ruhender Ladungen

1.1 Kraft und Feld

1.1.1 Punktladungen

- Punktladung ist eine Punktmasse (Idealisierung)
- Verwendung, wenn die Ausdehnung der Kugeln sehr klein ist gegenüber dem Abstand der Kugeln

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Experimente führen zur Formulierung des Couloumb-Gesetzes

$\vec{F}_{21} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$

$\Rightarrow F_{21} =$ Kraft, die Ladung 2 durch die Anwesenheit der Ladung 1 erfährt

Einheitensystem: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \dfrac{Vm}{As}$

$[F] = \dfrac{(As)^2}{m^2}\dfrac{Vm}{As} = \dfrac{VAs}{m} = \dfrac{Ws}{m} = \dfrac{N \cdot m}{m} = N$

$q_1 q_2 > 0 \Rightarrow$ abstoßende Kräfte
$q_1 q_2 < 0 \Rightarrow$ abziehende Kräfte

Nahwirkungstheorie der elektromagnetischen Wechselwirkung:

$\vec{F}_{21} = q_2 \vec{E}_1$ elektrisches Feld der Punktladung q_1 am Ort der Punktladung q_2

$\vec{E}_1 = \dfrac{q_1 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

allgemein: $\vec{F} = q\vec{E}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ elektrisches Feld der Punktladung q am Ort $\vec{r}$

Verallgemeinerung: N Punktladungen q_i wechselwirken mit der Probeladung q

Experimente:
$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q\vec{E}_i = q\sum_i \vec{E}_i \Rightarrow$ Prinzip der ungestörten Superposition (d.h. Differentialgleichung zur Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$ linear!)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Rückblick auf die Mechanik:

Couloumb-Kraft ist eine Zentralkraft mit Potential, also

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$
$$V(r) = V_0 - \int_{r_0}^{r} dr' F(r')$$

Behauptung:

$$V(r) = q \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \equiv q\varphi(r)$$
$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Beweis:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi(r) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{r}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

Potentialflächen sind Kugelflächen

jetzt N Punktladungen:

Behauptung:
$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Beweis: $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi(\vec{r}) = -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial|\vec{r}-\vec{r}_i|}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}|\vec{r}-\vec{r}_i| = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

1.1.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung

bestimmte Fläche bzw. Wolke im Raum - zur Veranschaulich/Vereinfachung aufgeteilt in viele kleine Zellen mit der Ladung $\Delta q = \varrho\Delta V$ ($\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$) $\Rightarrow \mathrm{d}q = \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V$

$$Q = \int_V \mathrm{d}q = \int \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Beispiele:

- homogen geladene Kugel mit Radius R und Ladung Q:

$$\varrho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

- homogen gelandener Vollzylinder mit Radius R, Höhe h und Ladung Q:

$$\varrho = \frac{Q}{\pi R^2 h}$$

1.1.3 Kraftdichte und Ladungsdichte

aus $\sum_i q_i$ wird $\int \mathrm{d}V'\varrho(\vec{r}')$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}V'\varrho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}V'\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Kraftdichte: $d\vec{F} = \vec{E}\mathrm{d}q = \varrho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}V = \varrho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}V = \vec{f}\mathrm{d}V$

$$\vec{f} = \varrho\vec{E}$$

1.2 Quellen und Wirbel elektrostatischer Felder

1.2.1 Quellbegriff, Ladungen als Quellen

Quellenbegriff: Abbildung: Feldlinien mit vielen einzelnen Ladungen → Tangenten an Ladungen (unterschiedliche Längen)

- Tangente gibt Richtung des Vektorfeldes an

- Dichte der Feldlinien (pro Flächeneinheit - $\perp$ zu den FL messbar) - ist Maß für die Stärke des Feldes

Quelle: FL beginnen
Senke: FL enden (negative Quelle)

$$I \sim \underbrace{N_{\uparrow\uparrow}}_{\text{Zahl austret. FL}} - \underbrace{N_{\downarrow\downarrow}}_{\text{Zahl eintret. FL}}$$

Fälle:

- $I = 0$: es treten so viele FL ein wie aus → quellfrei
- $I > 0$: Feld enthält Quellen

beliebiges Volumen V: einzelne kleine Oberflächenteile $\mathrm{d}\vec{A}$:

$$\underbrace{\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}(\vec{r})}_{\textbf{Quellstärke des Vektorfeldes } \vec{E}(\vec{r})} \sim N_{\uparrow\uparrow} - N_{\downarrow\downarrow}$$

Quellstärke=$\oiint \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r})$

Ladungen als Quellen (Kugel mit einzelner Punktladung im Mittelpunkt):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\oiint \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \oiint \mathrm{d}\vec{A}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oiint \frac{\mathrm{d}A}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Hinweis: $\oiint \mathrm{d}A = r^2 \mathrm{d}\Omega \Rightarrow 4\pi R^2 \qquad \left|\frac{\mathrm{d}A_\perp}{r^2}\right| = \mathrm{d}\Omega$

⇒Quellstärke unabhängig von Radius der Kugel, die die Punktladung enthält

beliebiges Gebiet mit Punktladung (wie oben, nur ohne Symmetrie)

$$\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint \frac{\mathrm{d}\vec{A}\frac{\vec{r}}{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint \frac{\mathrm{d}A_\perp}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

beliebiges Gebiet mit Punktladung **außerhalb** - in diesem Fall $\mathrm{d}A_\perp = \mathrm{d}\vec{A}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ sowohl positiv wie negativ

$$\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E} = 0$$

Grund: Punktladung ist außerhalb der Fläche

N Punktladungen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) \qquad \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E} = \sum_i \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}_i = \sum_{q_k \text{ in } V} \frac{q_k}{\varepsilon_0}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

Man sucht sich einen Punkt x in V, von dem aus man den Vektor $\vec{r}$ aufspannt.

$$\varepsilon_0 \oiint_A \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}(\vec{r}) = Q_{ein} = \int_V \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ **integrale Kenngröße**

Gaußscher Satz: $\varepsilon_0 \oiint_A \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}V \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}V\,\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r})$

$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Rechnen mit Divergenzen:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E}(\vec{r}) = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z)$$

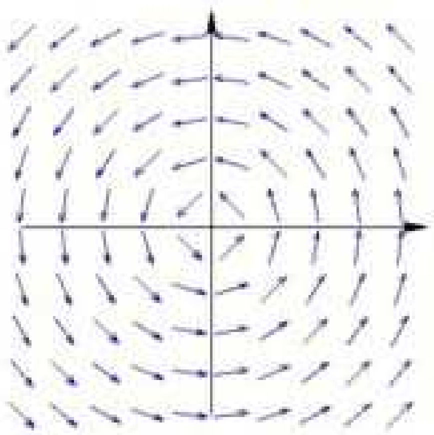
$$= \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z$$

Beispiele:

$\mathrm{div}\vec{r} = 3$
$\mathrm{div}\vec{r}^3 = 5r^2$
$\mathrm{div}(\vec{a}\vec{r})\vec{r} = 4(\vec{a}\vec{r})$
$\mathrm{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0$

$\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow$ Quellen ja, Wirbel?

- Wirbelbegriff:



$\vec{A}_1(\vec{r})$ - klassisches Wirbelfeld

homogenes Feld mit Leiterschleife: $\vec{A}_2(\vec{r})$ - ebenfalls Wirbelfeld
Wirbelstärke: $\oint \mathrm{d}\vec{r}\vec{A}(\vec{r}) > 0$ für inhomogenes Feld (Beträge der Feldlinien oben größer als unten), $= 0$ für homogenes Feld

- Feld der Punktladung: $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_C \frac{\mathrm{d}\vec{r}\vec{e}_r}{r^2}$$

Zerlegung von $\mathrm{d}\vec{r}$ in $\mathrm{d}\vec{r}_{||} + \mathrm{d}\vec{r}_\perp$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \int_{r_{iu}}^{r_{io}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = 0$$

Das Umlaufintegral über einen beliebigen Weg beim elektrostatischen Feld einer Punktladung ist 0.

Verallgemeinerung auf beliebige $\varrho(\vec{r}) \rightarrow$ **elektrostatische Felder sind wirbelfrei**

- Wirbeldichte: Umformung mit Satz von Stokes

$$\oint_{(C)} \mathrm{d}\vec{r}\vec{E}(\vec{r}) = \iint_{\text{bel. Flächemit Rand } C} \mathrm{d}\vec{A}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{E}(\vec{r})\right) = \vec{0}$$
$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

1.3 Berechnung elektrostatischer Felder

$\vec{E}$ =? $\rightarrow$ elektrostatisches Potential als Hilfsmittel zur Feldberechnung - jedes Gradientenfeld ist wirbelfrei

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi(\vec{r}) \Leftarrow \text{rot } \vec{E} = 0 = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi = -\varepsilon\Delta\varphi(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \text{ (Poisson-Gl.)} \qquad \frac{\partial^2}{(\partial\vec{r})^2} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V' \frac{\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi = \int \mathrm{d}V' \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

1.3.1 Felder kugelsymmetrischer Ladungsverteilungen

Kugelsymmetrie: ϱ hängt nur vom Betrag des Vektors r ab.

$\varrho(\vec{r}) = \varrho(r)$

- auf Kugelflächen wirkt eine konstante Ladungsdichte
- elektrisches Feld senkrecht zur Kugeloberfläche: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}$
- Feldberechnung durch direkte Auswertung der Quellgleichung

  $\varepsilon_0 \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}V'\varrho(r')$

  $\varepsilon_0 \oint \mathrm{d}\vec{A}\frac{\vec{r}}{r}E(r) = \varepsilon_0 E(r) \oiint \mathrm{d}A = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = \int_0^r \mathrm{d}V'\varrho(r') = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 \varrho(r')$

  $E(r) = \frac{\int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 \varrho(r')}{\varepsilon_0 r^2}$

Beispiel: elektrostatisches Feld und Potential/homogen geladene Kugel

$$\varrho(r) = \begin{cases} \frac{4Q}{4\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3 & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

$$\varrho(r) = \underbrace{\varrho(\infty)}_{0} - \int_\infty^r E(r')\mathrm{d}r'$$

$$r > R: \quad \varrho(r) = -\int_\infty^r \mathrm{d}r' \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\bigg|_\infty^r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r < R: \quad \varrho(r) = \varrho(R) - \int_R^r E(r')\mathrm{d}r' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \int_R^r \mathrm{d}r' \frac{Qr'}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Q}{e\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot \frac{1}{2}\frac{r'^2}{R^2}\bigg|_R^r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(-\frac{r^2}{2} + 3\frac{R^2}{2}\right)$$

1.4 Energien des elektrostatischen Feldes

N Punktladungen der Stärke q_i befinden sich im Unendlichen $\Rightarrow$ kräftefrei, keine Energie (sie sind alle voneinander ∞ weit entfernt) $\Rightarrow$ jetzt werden die Punktladungen ins Endliche gebracht $\Rightarrow$ Potential der Couloumb-Kraft tritt auf.

$$V_{nm} = \frac{q_n q_m}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

$\Rightarrow$ die gesamte potentielle Energie der Ladungsverteilung erhalten wir durch Summation aller Paare:

$$E_{pot} = \sum_{Paare} V_{nm} = \sum_{Paare} \frac{q_n q_m}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = \frac{1}{2}\sum\sum\nolimits_{n \neq m} \frac{q_n q_m}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

Kontinuum: $\left.\begin{array}{r} q_n = \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V \\ q_m = \varrho(\vec{r}')\mathrm{d}V' \end{array}\right\} n \neq m$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \iint \frac{\mathrm{d}V \mathrm{d}V' \varrho(\vec{r})\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Feldtheorie: statisches Feld hat eine gewisse Energie $\Rightarrow$ potentielle Energie der Ladungsverteilung ist gleich Feldenergie $E_{pot} = E_F$

Umformungen (analoge Schreibweisen), um besser rechnen zu können:

$$E_F = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \varrho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \qquad \text{(=Lösung der Poisson-Gleichung)}$$

$$\varrho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E}$$

$$E_F = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} E(\vec{r})\right) \varphi(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{E}\varphi) - \vec{E}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\varphi\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \oiint \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}\varphi}_{0} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathrm{d}V \vec{E}^2 = \int \mathrm{d}V w(\vec{r}) \qquad \text{mit } w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$$

Feldenergie einer homogen geladenen Kugel: Selbstenergie

$$E_{innen}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot r \qquad r \leq R$$
$$E_{außen}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r \geq R$$
$$E_F = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R E^2_{innen}(r)\mathrm{d}V + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty E^2_{außen}(r)\mathrm{d}V$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi\left(\int_0^R\left(\frac{r}{R^3}\right)^2 r^2\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{1}{r^4}r^2\mathrm{d}r\right)$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5}\frac{r^5}{R^6}\bigg|_0^R - \frac{1}{r}\bigg|_R^\infty\right)$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}\right)$$
$$= \frac{3}{20}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

1.4.1 Wechselwirkungsenergie

$$\varrho(\vec{r}) = \varrho_1(\vec{r}) + \varrho_2(\vec{r})$$

$$E_W \equiv E_F^{(1+2)} - E_F^{(1)} - E_F^{(2)}$$
$$= \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}V\mathrm{d}V'\frac{(\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1'+\varrho_2') - \varrho_1\varrho_1' - \varrho_2\varrho_2'}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$= \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}V\mathrm{d}V'\frac{\varrho_1\varrho_2' + \varrho_1'\varrho_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$= \iint \mathrm{d}V\mathrm{d}V'\frac{\varrho_1(\vec{r})\varrho_2(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$$
$$E_W = \int \mathrm{d}V\,\varrho_1(\vec{r})\varrho_2(\vec{r})$$
$$E_W = \varepsilon_0\int \mathrm{d}V\,\vec{E}_1(\vec{r})\vec{E}_2(\vec{r})$$

1.5 Elektrische Dipole

- $\varrho(\vec{r})$: lokalisierte Ladungsverteilung (alle Ladungen sind innerhalb eines begrenzten Gebietes)
- wann sind nicht alle Einzelheiten dieser Verteilung wichtig?
  1. für das Feld in großem Abstand
  2. für die Verteilung in einem sich nur schwach ändernden äußeren Feld
- einfache integrale Kerngrößen:
  1. Gesamtladung $Q = \int \mathrm{d}V\, \varrho(\vec{r})$ - für die Fälle 1. und 2. verhält sich dann die lokalisierte Ladungsverteilung mit $Q \neq 0$ wie eine Punktladung

     aber: Systeme mit $Q = 0$ sehr häufig!

     trotzdem im allgemeinen keine Kompensation der positiven und negativen Ladungen in ihren Wirkungen → unterschiedliche Verteilungen! → so können Ladungen im Mittel gegeneinander verschoben sein → ein solches System heißt **elektrischer Dipol**

  2. **elektrisches Dipolmoment:** $\vec{p} = \int \mathrm{d}V\, \varrho(\vec{r})\vec{r}$
     - Verschiebung des Bezugspunkts: $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{a} \Rightarrow \vec{p} \to \vec{p} - \vec{a}Q$

       → Invarianz von $\vec{p}$ für $Q = 0$
     - getrennte Betrachtung positiver und negativer Ladungen → dann wird die Betrachtung des Dipolmoments klarer:

       ϱ_+ ϱ_-

       $\varrho = \varrho_+ + \varrho_-$
       $Q = Q_+ + Q_- = 0$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int \mathrm{d}V\, \varrho_+\vec{r} + \int \mathrm{d}V\, \varrho_-\vec{r} \\ &= Q_+\left(\frac{\int \mathrm{d}V\, \varrho_+\vec{r}}{\int \mathrm{d}V\, \varrho_+} - \frac{\int \mathrm{d}V\, \varrho_-\vec{r}}{\int \mathrm{d}V\, \varrho_-}\right) \\ &= Q_+(\overline{\vec{r}_+} - \overline{\vec{r}_-})\end{aligned}$$

Beispiele: Dipolmomente einfacher Ladungsverteilungen

- Potential des elektrischen Dipols:
  lokalisierte Ladungsverteilung, Feld in großem Abstand - je weiter man weg ist: $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \dfrac{1}{r} + \dfrac{\vec{e}_r\vec{r}'}{r^2} + ...$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}V'\varrho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \cong \int \frac{\mathrm{d}V'\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{e}_r\vec{r}'}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{e}_r p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Feldstärke des Dipolfeldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}(\vec{r}\vec{p}) + (\vec{r}\vec{p})\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{r^3}\right)$$
$$= -\frac{\vec{p}-(\vec{r}\vec{p})\frac{3}{r}\frac{\vec{r}}{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{e}_r\vec{p})\vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

- Dipol im äußeren Feld

$E_W = \int \mathrm{d}V\,\varrho(\vec{r})\varphi(\vec{r})$

$\varrho(\vec{r}) \neq 0 : \quad \Delta\varphi = 0$

Die felderzeugenden Ladungen befinden sich an anderen Orten als die Ladungen, deren Wechselwirkung wir betrachten wollen.

Taylor-Reihe: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \left(\vec{r}\dfrac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\varrho(\vec{r})$

$$E_W = \varphi_0 \int \mathrm{d}V\,\varrho - \vec{E}_0\vec{p} = \varphi_0\vec{Q} - E_0\vec{p} \Rightarrow -\vec{p}\vec{E}_0$$

- Kraft, Drehmoment

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}V\,\varrho\vec{E} = \int \mathrm{d}V\,\varrho\left(\vec{E}_0 + \left(\vec{r}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{E}'\Big|_0 + ...\right) = \left(\vec{p}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{E}\Big|_0^0$$
$$\vec{M} = \int \mathrm{d}V\,\vec{r}\times\vec{f} = \int \mathrm{d}V\,\vec{r}\times\vec{\varrho}\vec{E} = \vec{p}\vec{E}$$

2 Magnetfeld stationärer Ströme

2.1 Beschreibung elektrischer Ströme

$\rightarrow$ Strom=Änderung der Ladung in einer bestimmten Zeit
$\rightarrow$ Stromdichte: Ladungen bewegen sich im Raum

$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ durch Fläche A

$\Rightarrow$ welcher Strom fließt durch welches Flächenelement?

Einführung einer **Stromdichte**: Richtung=Strömungsrichtung

$|\vec{j}| = j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A_\perp}$

$\vec{j}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}I$

$\iint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}(\vec{r}) = I \qquad \left(Q = \int \mathrm{d}V \varrho(\vec{r})\right)$

anschauliche Darstellung der elektrischen Stromdichte $\Rightarrow$ strömende Ladungen $\varrho(\vec{r}, t)$ bewegen sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$

$\mathrm{d}q$ - Ladungen im Volumen bewegt sich innerhalb einer kleinen Zeit $\mathrm{d}t$ durch die Fläche $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\varrho\vec{v}\mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \varrho\vec{v}\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \varrho\vec{v} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i \varrho_i\vec{v}_i = \sum_i \varrho_i \frac{\sum q_i\vec{v}_i}{\sum \varrho_i} = \varrho\vec{v}$$

Zusammenfassung: Die Stromdichte hat die Bedeutung eines auf die Fläche bezogenen Stroms (eine flächenhafte Dichte)

Ladungserhaltung: globale Formulierung: es gibt keine physikalische Prozesse, die die Gesamtladung ändern können → die Ladung im gesamten Raum ist konstant (Q^∞ =konst.) → für ein endliches von einer geschlossenen Oberfläche begrenztes Raumgebiet gilt: $Q(t)$ in V i.a. zeitabhängig:

$$Q(t) = \int_V \mathrm{d}V \, \varrho(\vec{r}, t)$$

$$I(t) = \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\dot{Q} + \oint I = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}V \, \varrho(\vec{r}, t) + \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}(\vec{r}, t)$$

⇒ Satz von Gauß: $\int \mathrm{d}V \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div} j \right] = 0$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = \dot{\varrho} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{j} = 0$$

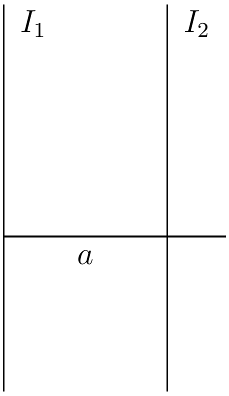
(Kontinuitätsgleichung)

Statische Probleme: Ladungsdichte ϱ unabhängig: $\dot{\varrho} = \dot{Q} = 0$, dann gilt $\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j} = 0$ bzw. $\frac{\partial \vec{j}}{\partial \vec{r}} = 0$ → Strömungsfeld ist quellfrei, meistens $\vec{j}$ dann auch zeitunabhängig → **stationäre Strömung**

Knotensatz: $\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j} = \sum_n \iint_{\mathrm{A}_n} \mathrm{d}\vec{A}\vec{j} = \sum_n I_n = 0$

2.2 Wirbel und Quellen statischer Magnetfelder

Experiment:



$\rightarrow$ Anziehung bei gleichsinnigen Strömen
$\rightarrow$ Abstoßung bei ungleichsinnigen Strömen

$$\frac{F}{L} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

$$[\mu_0] = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Strom}^2}\right] = \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Länge(Strom)}^2}\right] = \frac{\mathrm{VAs}}{\mathrm{mA}^2}$$

Einführung eines magnetischen Feldes

$\vec{B} \rightarrow$ Rechtsschraube (Pseudovektor)

Vergleich

Kräfte zwischen Ladungen	Kräfte zwischen Strömen
$F_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_1 q_2$	$F_{mag} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a} = B_1 I_2 L$
$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow F = qE$	$B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi a} \rightarrow F = BIL \rightarrow \vec{F} = IL\vec{h} \times \vec{B}$

Wirbel eines elektromagnetischen Feldes

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{e} \times \vec{r}|^2} \rightarrow$ Magnetfeld eines sehr dünnen Drahtes

Untersuchung der Wirbel

a) spezieller Weg längs einer Feldlinie: $\oint \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \oint |\mathrm{d}\vec{r}|B = B \cdot 2\pi a = \mu_0 I$

b) beliebiger Weg $\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\vec{e}\times\vec{r})}{|\vec{e}\times\vec{r}|^2} = \frac{\mu I}{2\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{|\vec{e}\times\vec{r}|}\frac{\vec{e}\times\vec{r}}{|\vec{e}\times\vec{r}|} = \frac{\mu I}{2\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{|\vec{e}\times\vec{r}|}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi}\oint \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$

c) mehrere gerade Ströme: $\oint \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \sum_k \mu_0 I_k \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}_k$

$c = \sum_n \mu_0 I_n$

Verallgemeinerung:

$$\oint \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \mu_0 \iint_A \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}$$

Durchflutungssatz $\rightarrow$ muss für beliebige Flächen über gleiche Randkurve gleichen Wert haben

$$\iint_{A_1} \mathrm{d}\vec{A}_1\vec{j} = \iint_{A_2} \mathrm{d}\vec{A}_2\vec{j}$$

Der Durchflutungssatz gilt nur streng für statische Magnetfelder und damit für stationäre Ströme.

Stokes'scher Satz: $\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \iint \mathrm{d}\vec{A}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{B}\right) = \mu_0 \iint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}$

Quellen eines elektromagnetischen Feldes:

$\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B}(\vec{r}) = 0 \rightarrow$ magnetisches Feld **immer** quellfrei

differentielle Formulierung: $\oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{B} = \int_V \mathrm{d}V\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B} = 0$

Quellfreiheit nachrechnen:

$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\vec{e}\times\vec{r}}{|\vec{e}\times\vec{r}|^2}\right) = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y\vec{e}_x}{x^2+y^2}\right) + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\vec{e}_x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy-2yx}{(x^2+y^2)^2} = 0$

Kraftdichte:
$\vec{F}_{mg} = IL\vec{e} \times \vec{B} \Rightarrow \int \mathrm{d}V \vec{j} \times \vec{B} = L \iint \mathrm{d}A \vec{j} = L \cdot I\vec{e}$

$\int \mathrm{d}V \vec{j} \times \vec{B} = \vec{F}_{mg} = \int \mathrm{d}V \vec{f}_{mg}$

$\vec{f}_{mg} = \vec{j} \times \vec{B}$
$\vec{f}_{el} = \varrho \vec{E}$

$\vec{j} = \varrho \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{f}_{mg} = \varrho \vec{v} \times \vec{B} \;\Rightarrow \vec{F}_{mg} = \int \mathrm{d}V \varrho \vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$

2.3 Berechnung von Magnetfeldern stationärer Ströme

Vektorpotential
Ausgangsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{B} = 0$$

Ansatz: $\vec{B} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A}(\vec{r}) \to \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{B} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A}(\vec{r}) \right) = \text{div rot} \vec{A}$

$\rightarrow$ ein reines Wirbelfeld hat niemals Quellen!

$\vec{A}(\vec{r})$ - sogenanntes Vektorpotential aus 1. Gleichung berechenbar, nicht eindeutig: $\vec{A}(\vec{r}) \to \vec{A}(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(\vec{r})$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} \to \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} f}_{=0 \text{ - Eichtransformation}}$

Nebenbedingung: $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{A} \right) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \qquad \rightarrow \text{„magnetische Poisson-Gleichung“}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathrm{d}V' \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$B(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}')$$

NR: $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}V' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ $\qquad \Rightarrow$ Gesetz von Biot-Savart

Feld stromdurchflossender Drähte

$\Rightarrow$ dann Vereinfachungen möglich (Drähte sollen „dünn“ sein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int \frac{\mathrm{d}V' \vec{j}(\vec{s}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{s}|}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}\vec{s}$ ist ein gerichtetes Linienelement d. Drahtes

$\mathrm{d}\vec{s} || \vec{j}(\vec{s}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}V' = \mathrm{d}\vec{A}_{Fl} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

$$\int \mathrm{d}V' \vec{j}(\vec{s}) \Rightarrow \int \left(\mathrm{d}\vec{A}_{Fl} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right) \vec{j}(\vec{s}) \Rightarrow \int \left(\mathrm{d}\vec{A}_{Fl} \cdot \vec{j} \right) \mathrm{d}\vec{s} = I \int \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 I \int \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{4\pi |\vec{r} - \vec{s}|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 I \int \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{R^3} \int \mathrm{d}\vec{s} \times (-\vec{s})$$

Felder einfacher Stromverteilungen (Felder mit Zylindersymmetrie)

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}(r_\perp) \vec{e}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r_\perp) \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{e} \times \vec{r}|}$$

$$\oint \mathrm{d}\vec{r} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \oiint \mathrm{d}\vec{A} \vec{j}(\vec{r})$$

$$2\pi r_\perp \cdot B(r_\perp) = \mu_0 2\pi \int_0^{r_\perp} \mathrm{d}r'_\perp \cdot r'_\perp j(r'_\perp)$$

$$B(r_\perp) = \frac{\mu_0}{r_\perp} \int_0^{r_\perp} \mathrm{d}r'_\perp \cdot r'_\perp \cdot j(r_\perp)$$

Beispiel: Draht mit Dicke $2R$, Strom I, konstante Stromdichte ($j = \frac{I}{\pi R^2}$) im Draht

$$B(r_\perp) = \frac{\mu_0}{r_\perp} \frac{I}{\pi R^2} \frac{r'^2_\perp}{2}\Big|_0^{r_\perp} = \frac{\mu_0 I r_\perp}{2\pi R^2} \qquad r_\perp < R$$

$$B(r_\perp) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \qquad r_\perp > R$$

2.4 Mögliche Formen der Energie des el.-magn. Feldes und magn. Dipole

analog zum elektrischen Fall: $E_F = \int \mathrm{d}V \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}) \quad \Rightarrow \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}V \vec{B} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} \right) =$ $\frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}V \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \oiint \mathrm{d}\vec{A}_F \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) + \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}V \vec{A} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \oiint \frac{\mathrm{d}V \mathrm{d}V' \vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

2.4.1 Wechselwirkungsenergie

2 Felder $\vec{j}_1(\vec{r})$ und $\vec{j}_2(\vec{r})$ $\Rightarrow$ $E_F = E_F^{(1)} + E_F^{(2)} + E_W = \mu_0 \oiint \frac{\mathrm{d}V\mathrm{d}V'\vec{j}_1(\vec{r})\vec{j}_2(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}V\vec{j}_1(\vec{r})\vec{A}_2(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0}\int \mathrm{d}V\vec{B}_1(\vec{r})\vec{B}_2(\vec{r})$

2.4.2 Zusammenstellung/Vergleich elektro- und magnetostat. Felder

	statisch elektrisches Feld	**statisches magnetisches Feld**
erzeugt von	$\varrho(\vec{r})$ (Ladung)	$\vec{j}(\vec{r})$ (Ströme)
Quellen	$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E} = \varrho$	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B} = 0$
Wirbel:	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j}$
Kräfte:	$\vec{f}_{el} = \varrho\vec{E}$	$\vec{f}_{mg} = \vec{j} \times \vec{B} = \varrho\vec{v} \times \vec{B}$
Potentialansatz:	$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\varphi$ $-\varepsilon_0\Delta\varphi = \varrho$	$\vec{B} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{A}$ $-\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$
Lösung	$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}V'\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$	$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\int \frac{\mathrm{d}V'\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$

2.4.3 Magnetische Dipole

2 Voraussetzungen müssen erfüllt sein

a) Stationarität
b) Lokalisiertheit

Untersuchung einfacher integraler Kenngrößen

(1) $\displaystyle\int \mathrm{d}V\vec{j} \Rightarrow \Delta I \oint \mathrm{d}\vec{s} = \vec{0}$
(2) $\displaystyle\int \mathrm{d}V\vec{j}(\vec{r})\vec{r} \Rightarrow \Delta I \oint \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{s}$
(3) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\vec{r}\times\vec{j} \Rightarrow \frac{1}{2}I\int \vec{s}\times\mathrm{d}\vec{s} = \vec{m} = I\vec{A}$

Dipolfeld: völlige Analogie zu den Überlegungen beim elektrischen Dipol:

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(\vec{m} \times \vec{e}_r\right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{r}) \approx \frac{3\vec{e}_r(\vec{m}\vec{e}_r) - \vec{m}}{4\pi r^3 \mu_0^{-1}}$$

Dipol im äußeren Feld: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = \left(\vec{m}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{B}\Big|_0$$

$$E_W = +\vec{m}\vec{B} = -E_{\text{pot}}$$

3 Zeitabhängige Felder

3.1 Verschiebungsströme

Ladungserhaltung (2.1) $\quad + \quad$ Durchflutungssatz (2.2)

Bestimmung des „Verschiebungsstroms“ $\vec{j}_v = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$

es gilt: $\oiint \mathrm{d}\vec{A}[\vec{j} + \vec{j}_v] = 0$

andererseits: Ladungserhaltungssatz: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}V \varrho(\vec{r}, t) + \oiint_A \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$

$$\underrightarrow{\varepsilon_0 \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial \vec{r}}} = \dot{\varrho} = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}V \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial \vec{r}} + \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j} = 0$$
$$= \oiint \mathrm{d}\vec{A} \left[\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + \vec{j}\right] = 0$$

verallgemeinerter Durchflutungssatz:

$$\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\vec{B} = \mu_0 \iint \mathrm{d}\vec{A} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}\right)$$

Beispiel: Kondensatoraufladung als Beispiel für die Existenz des Verschiebungsstroms

einfacher Plattenkondensator am Stromkreis

linke Platte: $\dot{Q}^+ = I = -\dot{Q}^-$

Quellgleichung: $\varepsilon_0 \oiint \mathrm{d}\vec{A}\vec{E} = Q^+ = \varepsilon_0 A E$

Ladungserhaltungssatz: $\dot{Q}^+ = I = \varepsilon_0 \dot{E} A$

Berechnung des Verschiebungsstroms: $I_v = \iint \mathrm{d}\vec{A}\vec{j}_v = \iint \mathrm{d}\vec{A}\varepsilon\dot{\vec{E}} = \varepsilon_0 \dot{E} A$

3.2 Induktion

Induktion bei fester Leiterschleife
Wir erzeugen ein zeitabhängiges Magnetfeld, indem wir ein inhomogenes $\vec{B}$-Feld ständig räumlich verschieben.

In diesem zeitabhängigen Magnetfeld befindet sich eine **feste** Leiterschleife, an deren Ende die feste Spannung U gemessen wird. Für diese induzierte Spannung ist offensichtlich nicht das $\vec{B}$-Feld sondern die *zeitliche Änderung der magnetischen Feldlinienzahl (Feldfluß)* verantwortlich.

$$\oint \mathrm{d}\vec{E} + \oiint_A \mathrm{d}\vec{A}\dot{\vec{B}} = 0$$

Umformung mit dem Integralsatz von Stokes:

$$\to \iint \mathrm{d}\vec{A} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} \right) = 0 \to \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Konsistenz-Bedingung:

$$\oiint \mathrm{d}\vec{A}\dot{\vec{B}} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\dot{\vec{B}} = 0 \text{ erfüllt wegen } \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{B} = 0$$

→ Experiment zeigt, dass es für den Induktionseffekt gleichgültig ist, ob die Feldspule oder die Induktionsspule bewegt wird.

3.3 Transformator

...

Zusammenfassung

	$\vec{E}(\vec{r},t)$	$\vec{B}(\vec{r},t)$
Quellen	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{B} = 0$
Wirbel	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0}$	$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dot{\vec{E}}$

Lorentz-Konvention: $\frac{1}{c^2}\dot{\varphi} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{r}} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = \mu_0\vec{j}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \times A\right)}_{\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{A}\right)-\Delta\cdot\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\left[\ddot{\vec{A}} + \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\vec{r}}\right] = \mu_0\vec{j}$$

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right]\vec{A} + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\underbrace{\left[\frac{\dot{\varphi}}{c^2} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{r}}\right]}_{0} = \mu_0\vec{j}$$

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \mu_0\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t)\varepsilon_0$$

3.4 Elektromagnetische Wellen

- Wellengleichungen im Vakuum (homogene Wellengleichung) $\varrho(\vec{r}) = 0, \vec{j}(\vec{r}) = \vec{0}$

$$(1)\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} = -\vec{B}\ ,\ (3)\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E} = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\vec{E}\ ,\ (4)\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{B} = 0$$

$$\dot{\vec{B}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E} = 0$$

$$\ddot{\vec{B}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} = 0$$

$$\ddot{\vec{B}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B}\right) = 0$$

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})\right]$$

$$\ddot{\vec{B}} + \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{B}\right) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\vec{B}\right]$$

$$\ddot{\vec{B}} - c^2\Delta\vec{B} = \vec{0},\quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B} = \vec{0}$$

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\Box\vec{B} = \vec{0}$$

das Gleiche fürs E-Feld

(2) nach t ableiten

$$\mu_0\varepsilon_0\ddot{\vec{E}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \dot{\vec{B}} = 0$$

(1) einsetzen

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}\right] = \vec{0}$$

mit (3):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \Delta\vec{E} = 0$$

$\rightarrow \Box\vec{E} = \vec{0}$ und $\Box\vec{B} = \vec{0}$ sind homogene Wellengleichungen. Als nächstes Untersuchung der Lösungen für den einfachsten Fall.

- skalare ebene Wellen

  $$\Box f = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f = 0$$

  Was wissen wir über die Gleichung?

  - einache Differentialgleichungen
  - homogen
  - keine Dämpfung
  - Superpositionsprinzip

  (5) $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$

  $\Rightarrow \Box f = 0$ ist erfüllt für

  $$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

  $\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $f(x,t) = f(x \pm ct)$

  Probe:

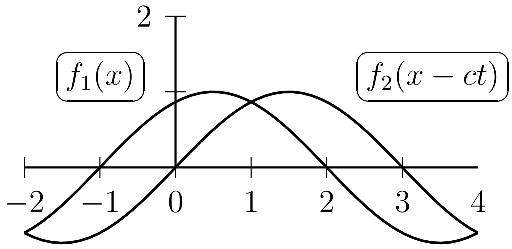
  $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x-ct) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) f(u(x,t)) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{c}f'(-c) + f'(1) = -f' + f' = 0$

  $\Rightarrow$ Superposition ist ebenfalls Lösung

  $f(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$

  $[\Box f(x,t) = \Box(f_1 + f_2) = \Box f_1 + \Box f_2 = 0]$

$f_1(x - ct)$ ist eine nach rechts laufende Welle



Flächen gleicher Phase bewegen sich mit Geschwindigkeit c nach rechts

- periodisch ebene Wellen
  $f_1(x - ct) = A\cos(kx - \omega t) \qquad \Rightarrow \omega = ck$ (Dispersionsrelation)

  ω - Kreisfrequenz
  k - reziproke Wellenlänge, Wellenzahl
  $\rightarrow$ Untersuchung periodischer Wellen

  x =const, $f_x(t) \sim \cos(\omega t) + \alpha_x)$ $\rightarrow$ zeitliche Erscheinung der Welle an festem Ort

  t =const, $f_t(x) \sim \cos(kx + \alpha_t)$ $\rightarrow$ räumliche Erscheinung der Welle bei fester Zeit

  Verallgemeinerung: Ausbreitungsrichtung e

  $x \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{r}, (x = \vec{e}_x \cdot \vec{r})$

  $\Box f = 0 \;\Rightarrow\; f = f(\vec{e} \cdot \vec{r} - ct)$ ist eine ebene Welle in $\vec{e}$-Richtung

  Lösung der homogenen Wellengleichung

  Wleche Eigenschaften haben ebene elektromagnetiosche Wellen? Dazu Lösungen der homogenen Wellengleichungen in Maxwell-Gleichungen einsetzen:

  $\dot{\vec{B}} + \dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{E} = \vec{0}, u = \vec{e}\vec{r} - ct$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \vec{e} \times \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}u} = \vec{0} \\
&-c\vec{B}' + \vec{e} \times \vec{E}' = \vec{0} \\
&\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{B} = \vec{0} \\
&-\frac{1}{c}\vec{E}' - \vec{e} \times \vec{B}' = 0
\end{aligned}
$$