Mathematik für Physik und Computational Science, 41. Übung

1. Zeigen Sie anhand der Wahrscheinlichkeitsaxiome auf messbaren Räumen folgende Eigenschaften:
   (a) $P(\emptyset) = 0$,
   (b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
   (c) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
   (d) **(HA)** $P(A) \leq 1$,
   (e) **(HA)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Eine Tüte mit 40 Kirschen enthalte 10 madige. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 zufällig ausgewählten Kirschen keine madig ist?

3. Ein Prüfer hat 18 Standardfragen, von denen er 6 zufällig gewählte stellt. Ein Student kennt die Antworten zu 10 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die Prüfung zu bestehen, wenn er dazu mindestens 3 Fragen beantworten muss.

4. **(HA)** Die Zufallsgröße X habe die Verteilungsfunktion F. Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgrößen $aX + b$ ($a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ Konstanten) und X^2 an.

5. Die Ausschussrate eines Betriebes sei 2 %. Ein defektes Teil werde mit 95 % Wahrscheinlichkeit aussortiert. Mit 1 % Wahrscheinlichkeit sei ein aussortiertes Teil nicht defekt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nicht aussortiertes Teil einwandfrei ist.

6. Für das wiederholte Würfeln mit zwei Würfeln berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe „11" vor der Summe „8" fällt.

7. Bei gleichen Symptomen seien drei Krankheiten K_1, K_2 und K_3 möglich. Im Mittel liege in fünf, einem bzw. zwei von acht Fällen die Krankheit K_1, K_2 bzw. K_3 vor. Als Diagnosehilfe wird ein Test durchgeführt, der bei Vorliegen von K_1, K_2 bzw. K_3 mit der Wahrscheinlichkeit 0.2, 0.3 bzw. 0.9 positiv ausfällt.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test positiv ausfällt? (Hinweis: totale Wahrscheinlichkeit)
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen der einzelnen drei Krankheiten für einen Patienten, für den der Test negativ ausfiel? (Hinweis: Satz von Bayes)

8. **(HA)** Drei Männer lieben die gleiche Frau und wollen das Problem durch ein Duell „lösen". Sie sind aber unterschiedlich gute Schützen. Sie treffen jeweils mit 100 %, 80 % und 50 %. Zum Ausgleich vereinbaren sie, dass sie in der Reihenfolge (50 %, 80 %, 100 %) dran sind und reihum jeder sein Ziel frei wählen kann, bis nur noch einer übrig bleibt. Wer hat bei optimaler Strategie aller Beteiligten die größten Chancen? Dazu nehmen wir an, dass die Männer mit der 80- und 100-prozentigen Treffsicherheit jeweils auf den besten verbliebenen Schützen zielen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Überleben des 50-prozentigen Schützen, wenn er zuerst
   (a) auf den mit 100-prozentiger Treffsicherheit zielt,
   (b) auf den mit 80-prozentiger Treffsicherheit zielt,
   (c) mit Absicht daneben zielt (wir nehmen an, dass er das mit 100 % schafft).

Berechnen Sie auch die Überlebenswahrscheinlichkeit der anderen Schützen für die beste Wahl des 50-prozentigen Schützen.

9. **(Zusatz)** Wir betrachten die Irrfahrt eines Teilchens im Eindimensionalen, d. h. ein Teilchen bewege sich auf den Punkten von $\mathbb{Z}$. Es beginnt seine Irrfahrt im Nullpunkt und springt in jedem Schritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zum nächstliegenden Punkt nach links oder nach rechts. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt? Ermittle die erwartete Rückkehrzeit.