Mathematematik für Physik und Computational Science, 37. Übung

---

1. Zeigen Sie:
Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ auf X mit $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$ für alle $x \in X$ genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ die Gleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt ist.

2. Auf $[-1, 1]$ definieren wir die Funktionen U_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, die Tschebyschow-Polynome 2. Art genannt werden:

$$U_n(\cos s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(n+1)s}{\sin s}.$$

Man zeige: U_n ist ein Polynom in $x = \cos s$ vom Grad n und das System $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x, \qquad w(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

3. l^1 sei der Raum aller Zahlenfolgen $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit Elementen aus $\mathbb{K}$, die die Beziehung $\|a\|_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ erfüllen. Beweisen Sie, dass $(l^1, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist!