Mathematik für Physik und Computational Science, 36. Übung

WS 2016/17 https://www-user.tu-chemnitz.de/~creb/index.php

---

1. Man zeige: Der Raum der Nullfolgen c_0 ist ein abgeschlossener Teilraum von l^∞.

(Zusatz) Man zeige: Der Raum c der konvergenten Folgen ist ein abgeschlossener Teilraum von l^∞.

2. $(U, \|\cdot\|_\alpha)$ sei ein Banachraum und $\|\cdot\|_\beta$ sei zu $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent, d. h. es existieren positive Konstanten C_1, C_2 so, dass $C_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le C_2\|x\|_\beta$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass dann auch $(U, \|\cdot\|_\beta)$ ein Banachraum ist!

3. Im Koordinatenraum $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) seien folgende Normen definiert:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \ge 1, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

Zeigen Sie, dass alle diese Normen zueinander äquivalent sind. (Hinweis: Zeigen Sie, dass alle p-Normen zur ∞-Norm äquivalent sind.)

4. Zeigen Sie, dass folgende Operatoren linear und beschränkt sind und berechnen Sie deren Normen:
   (a) $A : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s,$
   (b) **(HA)** $A : C[-1,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = x(t),$
   (c) $A : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = t^2 x(0),$
   (d) $D_0 : C^1[0,1] \to C[0,1], \quad D_0 f = f',$
   (e) **(HA)** $D_1 : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to C[0,1], \quad D_1 f = f',$
   (f) $T : C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\mathrm{d}s, \quad k : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ stetig.