Mathematik für Physik und Computational Science, 35. Übung

---

1. Zeigen Sie: Die Norm ist eine stetige Abbildung von $(U, \|\cdot\|)$ in $\mathbb{R}$, d. h. aus $x_n \to x$ in U folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

2. **(HA)** Man zeige: Die algebraischen Operationen in U sind stetig bezüglich der Norm, d. h. aus $x_n \to x$, $y_n \to y$ in $(U, \|\cdot\|)$ und $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ folgt

$$x_n + y_n \to x + y \quad \text{und} \quad \lambda_n x_n \to \lambda x \quad \text{in } U.$$

3. Zeigen Sie, dass l^∞ – der Raum aller beschränkten Zahlenfolgen aus $\mathbb{C}$ – ein Banachraum ist.

4. Man zeige: Der Raum der Nullfolgen c_0 ist ein abgeschlossener Teilraum von l^∞.

5. $(U, \|\cdot\|_\alpha)$ sei ein Banachraum und $\|\cdot\|_\beta$ sei zu $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent, d. h. es existieren positive Konstanten C_1, C_2 so, dass $C_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq C_2\|x\|_\beta$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass dann auch $(U, \|\cdot\|_\beta)$ ein Banachraum ist!