Mathematik für Physik und Computational Science, 34. Übung

WS 2016/17 https://www-user.tu-chemnitz.de/~creb/index.php

---

1. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},\ r > 0,$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\},$

   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\},$

   (d) **(HA)** eine beliebige Gerade durch $z \neq 0$.

2. Man bestimme das Bild

   (a) von $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}$,

   (b) der rechten Halbebene unter der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}$,

   (c) **(HA)** des ersten Quadranten unter der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$.

3. Sind folgende Ausdrücke $d(x,y)$ Metriken in X $(x, y \in X)$?

   (a) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sin^2(x-y)$, (b) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{x \cdot y}$.

4. Es seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume. Für Elemente $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des kartesischen Produktes $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definieren wir

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

   Ist d eine Metrik auf X?

5. Unter der *Ableitung* A' einer Menge A eines metrischen Raumes X versteht man die Menge aller Häufungspunkte von A, unter der *Abschließung* $\overline{A}$ von A versteht man die Menge $\overline{A} = A \cup A'$.

   Sei $\mathbb{R}$ ausgerüstet mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Finden Sie die Ableitung A' und die Abschließung $\overline{A}$ folgender Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ und untersuchen Sie ob A oder $\overline{A}$ offene bzw. abgeschlossene Mengen sind:

   (a) $A = \mathbb{N}$, (b) $A = (0,1) \cup (1,2)$, (c) $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, (d) **(HA)** $A = \{0\} \cup (1,2)$,

   (e) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right\}$, (f) **(HA)** $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{2n-3}{3n+2}\right\}$.