Mathematik für Physik und Computational Science, 33. Übung

SS 2017 https://www-user.tu-chemnitz.de/~creb/index.php

---

1. Man entwickle die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $0 < |z| < 1$, (b) $0 < |z-1| < 1$, (c) $1 < |z| < \infty$.

2. Man entwickle die Funktion $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $1 < |z| < 2$, (b) **(HA)** $2 < |z| < \infty$, (c) $0 < |z-2| < 1$, (d) **(HA)** $0 < |z-1| < 1$.

3. Man entwickle folgende Funktionen an ihren singulären Stellen in eine Laurentreihe. Man gebe das Konvergenzgebiet der Reihen an!

   (a) $f_1(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$, (b) $f_2(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2}$, (c) **(HA)** $f_3(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}}$, (d) **(HA)** $f_4(z) = \sin\frac{1}{z}$.

4. **(HA)** Man charakterisiere für die Funktionen der Aufgaben 6, 7 und 8 die singulären Stellen (Polstelle, hebbare und wesentliche Singularität) und ermittle die Residuen an diesen Stellen.

5. Man berechne möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2},\ z_1 = -3,\ z_2 = 5,$

   (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1},\ z_0 = \dfrac{\pi}{4},$

   (c) $f(z) = \sin\dfrac{1}{1-z},\ z_0 = 1,$

   (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^z},\ z_0 = 0,$

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-\mathrm{e}^z},\ z_0 = 0,$

   (f) **(HA)** $f(z) = \cot z,\ z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = \pi.$

6. Man berechne folgende Integrale mithilfe des Residuensatzes:

   (a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z$, (b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathbf{i}\cot z}{z(z-1)}\mathrm{d}z$, (c) **(HA)** $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{1-z}}{z(1-z)}\mathrm{d}z.$