

1. Seien m, n, k natürliche Zahlen. Sind folgende Aussagen wahr? Falls die Aussagen im Allgemeinen nicht gelten, geben Sie Bedingungen für deren Gültigkeit an!
- (a) Wenn k die Zahl m teilt ($k|m$) und m die Zahl n teilt ($m|n$) dann gilt $k|n$.
 - (b) Wenn $k|m$ und $k|n$ gilt, dann folgt $k|(m+n)$.
 - (c) Wenn k das Produkt $m \cdot n$ teilt, dann teilt k die Zahl m oder die Zahl n .
 - (d) Wenn m und n den Rest r bei Division durch k lassen, dann lässt $m+n$ auch den Rest r .
 - (e) **(HA)** Gelten die Aussagen (b) und (d) für das Produkt $m \cdot n$?
 - (f) Es gibt endlich viele Primzahlen.
 - (g) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
- (a) $|x-2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x+1|$, (c) $|x+2| + |x-2| \leq 12$,
 - (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

3. Veranschaulichen Sie in der xy -Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

(a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x+y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x-y| \leq 2$.

4. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:

- (a) $\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos \alpha$, (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
- (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (e) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$,
- (c) **(HA)** $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$, (f) **(HA)** $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

5. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
- (b) **(HA)** $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
- (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fixiert),
- (d) **(HA)** $(\frac{3}{7})^{3x-7} = (\frac{7}{3})^{7x-3}$.

6. Man löse folgende Ungleichungen:

- (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,
- (c) **(HA)** $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

7. Dividieren Sie:
 (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.
8. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
 (a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$, (b) $(1 + \mathbf{i})^3$, (c) **(HA)** $(1 + 2\mathbf{i})^6$, (d) $\frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) \mathbf{i}^k ($k \in \mathbb{Z}$),
 (f) $\frac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ ($a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$), (g) $\frac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, (h) $(a + b\mathbf{i})^n$ ($a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$).
9. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:
 (a) $\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$, (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$, (c) $\sin \alpha + \mathbf{i}(1 - \cos \alpha)$ ($\alpha \in [-\pi, \pi)$), (d) $1 + \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4}$.
10. Es sei $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$ mit $x, y \in \mathbb{R}, \varphi \in [-\pi, \pi), r > 0$ eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:
 (a) \bar{z} , (b) $\frac{1}{z}$, (c) z^2 , (d) $\mathbf{i}z$, (e) $z\bar{z}$, (f) **(HA)** $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|$.
11. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre
 (a) $(1 + \mathbf{i})^{10}$, (b) $(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) **(HA)** $(-1 + \mathbf{i})^5$, (d) $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^3$, (e) **(HA)** $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^9$.
12. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft
 (a) $z = \frac{1}{z}$, (b) $\operatorname{Re}(z^2) = 1$, (c) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c$, (d) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$, (e) $2 < |z| < 4$,
 (f) $|z - z_0| = |z - z_1|$, (g) $|z + 3| + |z - 3| \leq 10$,
 wobei $c \in \mathbb{R}$ und $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind.
13. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungen:
 (a) $z^3 = -1$, (b) $z^4 + 1 = 0$, (c) **(HA)** $z^3 + 2 = 2\mathbf{i}$, (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$,
 (e) $z^2 = -3 - 4\mathbf{i}$, (f) $z^4 - 2\mathbf{i}z^2 + 2\mathbf{i} = 1$, (g) $z^2 + 4\mathbf{i}z + 5 = 0$
14. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$2(|z|^2 + |w|^2) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

gilt.

15. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:
 (a) $p(z) = z^3 + 1$, (b) $p(z) = z^4 - 16$, (c) **(HA)** $p(z) = (z^3 - 1)(z^3 + 8)$.
16. Sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \log_2 3 + \mathbf{i} \log_2 6$ irrational?
17. Berechnen Sie die Summe und das Produkt aller komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

18. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha, n\alpha \notin \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ die Beziehung

$$\left(\frac{1 + \mathbf{i} \tan \alpha}{1 - \mathbf{i} \tan \alpha} \right)^n = \frac{1 + \mathbf{i} \tan(n\alpha)}{1 - \mathbf{i} \tan(n\alpha)}$$

gilt.

19. Es seien $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.