

1. Wir definieren auf dem Raum $C[0, 1]$ die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$$

und

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Weiterhin definieren wir $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ durch $(Af)(t) := t \cdot f(t)$.

Ist der Operator A zwischen den folgenden normierten Räumen stetig und wenn ja, welche Norm hat er?

(a) $A : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

(b) $A : (C[0, 1], \|\cdot\|_2) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_2)$

(Hinweis: Überlegen Sie sich, ob die Norm des Operators echt kleiner als 1 sein kann.)

(c) $A : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_2)$

(d) $A : (C[0, 1], \|\cdot\|_2) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

(Hinweis: Nutzen Sie die Funktionen $f_n(t) := t^n$)

2. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 36. Übung!