

Fast FOURIER-Transformation

Andy Böhme

8. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	FOURIER- Transformation	3
2.1	Das FOURIER- Integral	3
2.2	Eigenschaften der FOURIER- Transformation	3
2.3	Faltung und Korrelation	4
2.4	FOURIER- Reihen und Abtastsignale	4
3	Diskrete FOURIER- Transformation	5
3.1	Zeitbereich	5
3.2	Frequenzbereich	6
4	Schnelle FOURIER-Transformation	7
4.1	Matrixdarstellung und Signalflußgraphen	7
4.2	COOLEY-TUCKEY-Algorithmus für $N = 2^\gamma$	8
4.3	Anmerkungen	9
5	Literatur und Folien	9

1 Einleitung

Die FOURIER-Transformation wird seit langem in solch verschiedenen Gebieten wie linearen Systemen, Optik, Antennen und Signaltheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Quantenphysik verwendet. Eine entsprechende Aussage über die diskrete FOURIER-Transformation trifft nicht zu. Trotz sehr hohen Rechengeschwindigkeiten, die mit modernen Rechnern erreichbar sind, fand die diskrete FOURIER-Transformation relativ wenig Anwendung, weil sie außerordentlich hohe Rechenzeiten benötigte. Mit der Entwicklung der schnellen FOURIER-Transformation, einem Algorithmus zur schnellen Auswertung derselben, aber ließen sich viele Aspekte der wissenschaftlichen Analyse vollständig revolutionieren.

Die Hauptaufgabe der FOURIER-Transformation besteht darin ein Signal bzw. eine Funktion in eine Summe von Sinusfunktion unterschiedlicher Frequenzen und Amplituden zu zerlegen. Wenn aus diesen Sinusfunktionen das ursprüngliche Signal wiedergewonnen werden kann, dann hat man die FOURIER-Transformierte des Signals gefunden. Im laufenden folgt eine Übersicht über die FOURIER-Transformation als analytisches Instrument und ihre Verwendungsweise. Ferner wird auf die Diskrete FOURIER-Transformation eingegangen bis schliesslich die Schnelle FOURIER-Transformation als effiziente Berechnungsmethode hergeleitet wird.

Während einer Sitzung des wissenschaftlichen Beratungskomitees des U.S. Präsidenten stellte RICHARD L. GARWIN fest, daß JOHN W. TUCKEY sich mit der Erstellung von Programmen für die FOURIER-Transformation beschäftigte. GARWIN, der selbst für seine Forschungsarbeit hoffnungslos auf der Suche nach einer schnellen Methode war, fragte TUCKEY nach dessen Kenntnissen über Rechenverfahren für die FOURIER-Transformation. TUCKEY umriß im wesentlichen das, was später zu dem Berühmten COOLEY-TUCKEY Algorithmus führte. GARWIN ging zum Rechenzentrum des IBM-Forschungszentrums in Yorktown Heights um das Verfahren programmieren zu lassen. JAMES W. COOLEY, ein relativ neuer Mitarbeiter, erstellte auf GARWIN's drängen ein Computerprogramm. Nachdem sich jedoch Nachfragen für Kopien des Programms häuften, wurde COOLEY um eine Veröffentlichung gebeten. 1965 publizierten COOLEY und TUCKEY den jetzt weltberühmten Aufsatz „An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series“ in [1]. Ohne das Beharrungsvermögen von GARWIN wäre die FFT vielleicht noch bis heute unbekannt geblieben.

2 FOURIER- Transformation

2.1 Das FOURIER- Integral

Das FOURIER-Integral ist definiert durch den Ausdruck

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt. \quad (1)$$

Wenn das Integral für alle Werte von f existiert, dann definiert Gl. (1) die FOURIER- Transformierte $H(f)$ von $h(t)$. $h(t)$ wird als Funktion der Variablen Zeit und $H(f)$ als Funktion der Variablen Frequenz betrachtet. Die inverse FOURIER- Transformation ist definiert durch

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{i2\pi ft} df. \quad (2)$$

Stehen $h(t)$ und $H(f)$ nach Gleichungen (1) und (2) zueinander in Beziehung, dann bilden diese beiden Funktionen zueinander ein *FOURIER-Transformationspaar*. Wir symbolisieren diese Beziehung durch

$$h(t) \circ \longrightarrow \bullet H(f). \quad (3)$$

Die FOURIER- Transformierte von $h(t)$ existiert, und erfüllt die Beziehung der inversen FOURIER- Transformation, wenn $h(t)$ im Sinne von

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (4)$$

absolut integrierbar ist.

2.2 Eigenschaften der FOURIER- Transformation

Von den Eigenschaften der FOURIER- Transformation sind einige wenige für das vollständige Verständniss von grundlegender Bedeutung. Für die Beweise möchte ich auf [2] verweisen. Sind $X(f)$ bzw. $Y(f)$ die FOURIER- Transformatierten von $x(t)$ bzw. $y(t)$ und k sowie t_0 reelle Konstanten, dann gelten die folgenden Eigenschaften.

$$\text{Linearität: } x(t) + y(t) \circ \longrightarrow \bullet X(f) + Y(f) \quad (5)$$

$$\text{Symmetrie: } X(t) \circ \longrightarrow \bullet x(-f) \quad (6)$$

$$\text{Zeitskalierung: } h(kt) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{|k|} H\left(\frac{f}{k}\right) \quad (7)$$

$$\text{Frequenzskalierung: } \frac{1}{|k|} h\left(\frac{t}{k}\right) \circ \longrightarrow \bullet H(fk) \quad (8)$$

$$\text{Zeitverschiebung: } h(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet H(f)e^{-i2\pi ft_0} \quad (9)$$

$$\text{Frequenzverschiebung: } h(t)e^{i2\pi t f_0} \circ \longrightarrow \bullet H(f - f_0) \quad (10)$$

2.3 Faltung und Korrelation

Die Funktion $h(t)$ wird als *Faltungsprodukt* der Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ bezeichnet und ist definiert durch das Faltungsintegral

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau =: x(t) * y(t). \quad (11)$$

Die Beziehung zwischen dem Faltungsintegral (11) und ihrer FOURIER- Transformierten ist wahrscheinlich das wichtigste und leistungsfähigste Instrument der modernen Analysis. Sie besagt im wesentlichen, dass eine Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich äquivalent zu einer Multiplikation ihrer FOURIER- Transformierten im Frequenzbereich ist. Das Zeitbereichs Faltungstheorem lässt sich durch das Transformationspaar

$$x(t) * y(t) \circ \longrightarrow \bullet X(f)Y(f) \quad (12)$$

zum Ausdruck bringen. In analoger Weise kann man unter Anwendung des Faltungstheorems für den Frequenzbereich von einer Faltung im Frequenzbereich ausgehen und zu einer Multiplikation im Zeitbereich gelangen. Das Frequenzbereichs Faltungstheorem lautet

$$x(t)y(t) \circ \longrightarrow \bullet X(f) * Y(f) \quad (13)$$

Zum Beweis beider Theoreme gelangt man durch Einsetzen in die Definition und Vertauschen der Integrationsreihenfolge.

2.4 FOURIER- Reihen und Abtastsignale

Aus der Analysis ist bekannt das sich eine Periodische Funktion $y(t)$ der Periode T_0 als FOURIER- Reihe

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad (14)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

darstellen lässt, wobei $f_0 = 1/T_0$ die Grundfrequenz von $y(t)$ ist. Ausgehend von dieser Eigenschaft, dass die FOURIER- Transformierte einer periodischen Funktion, eine Folge: α_n äquidistanter Deltafunktionen ist, ist der nächstliegende Schritt die Erweiterung der Theorie auf Abtastsignale. Wenn $h(t)$ bei $t = T$ stetig ist, lässt sich ein Abtastwert von $h(t)$ zum Zeitpunkt T ausdrücken als

$$\hat{h}(t) = h(t)\delta(t - T) = h(T)\delta(t - T) \quad (16)$$

und wenn $h(t)$ an den Stellen $t = nT$ für bel. ganzzahliges n stetig ist, wird

$$\hat{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (17)$$

als Abtastsignal $\hat{h}(t)$ und T als Abtastperiode bezeichnet.

Das Abtasttheorem besagt, dass sich eine kontinuierliche Funktion $h(t)$ aus ihren Abtastwerten nach Gl. (17) mit $T_c = 1/2f_c$ eindeutig rekonstruieren lässt, wenn die FOURIER- Transformierte der Funktion für alle Frequenzen größer f_c identisch Null ist. In diesem Fall ist $h(t)$ gegeben durch

$$h(t) = T_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT_c) \frac{\sin[2\pi f_c(t - nT_c)]}{\pi(t - nT_c)} \quad (18)$$

Ist die FOURIER- Transformierte für Frequenzen größer f_c nicht identisch Null so wird der daraus folgende Informationsverlust als Bandüberlappungseffekt bezeichnet. Eine Analoge Aussage zu Gl. (18) trifft für den Frequenzbereich zu, wenn $h(t) = 0$ für $|t| > T_c$ gilt, und ist gegeben mit

$$H(f) = \frac{1}{2T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{2T_c}\right) \frac{\sin[2\pi T_c(f - n/2T_c)]}{\pi(f - n/2T_c)} \quad (19)$$

3 Diskrete FOURIER- Transformation

3.1 Zeitbereich

Man betrachte das in Gl.(3) angegebene Transformationspaar. Um dieses zu diskretisieren, ist es zunächst notwendig, das Signal $h(t)$ abzutasten. Wenn das Abtastintervall T ist, lässt sich das Abtastsignal ausdrücken als

$$h(t)\Delta_0(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \quad (20)$$

Als nächstes wird das Signal zeitbegrenzt durch eine Multiplikation mit der Rechteckfunktion:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 & -\frac{T}{2} < t < T_0 - \frac{T}{2} \\ &= 0 & \text{sonst} \end{aligned} \quad (21)$$

wobei T_0 die Dauer der Begrenzungsfunktion (Beobachtungszeit) ist. Die zeitbegrenzung liefert

$$\begin{aligned} h(t)\Delta_0(t)x(t) &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \right] x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \end{aligned} \quad (22)$$

wobei angenommen wurde, dass N äquidistante Deltafunktionen innerhalb des Abtastungsintervalls liegen; i.e. $N = \frac{T_0}{T}$. Der letzte Schritt der Modifizierung des ursprünglichen kontinuierlichen FOURIER- Transformationspaares zu einem diskreten FOURIER- Transformationspaar ist die Abtastung der FOURIER- Transformierten der Gl. (22). Im Zeitbereich entspricht diese Abtastung der Faltung des zeitbegrenzten Abtastsignals (22) mit der Zeitfunktion gegeben durch:

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \quad (23)$$

Die gesuchte Beziehung ist

$$\begin{aligned}
[h(t)\Delta_0(t)x(t)] * \Delta_1(t) &= \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT) \right] * \left[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t-rT_0) \right] \quad (24) \\
&= \dots + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t+T_0-kT) \\
&\quad + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT) \\
&\quad + T_0 \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-T_0-kT) + \dots
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Gl.(24) eine Periodische Funktion der Periode T_0 beschreibt; kompakt aufgeschrieben lautet sie

$$\tilde{h}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT-rT_0) \right] \quad (25)$$

3.2 Frequenzbereich

Analog zu Gleichung (17) und aus dem Abschnitt über FOURIER- Reihen folgt dass die FOURIER- Transformierte aus einer Folge äquidistanter Deltafunktionen besteht:

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_0) \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (26)$$

mit

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \tilde{h}(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Durch einsetzen von (25) in (27) und der Tatsache, dass sich die Integration nur über eine Periode erstreckt erhält man mit $T_0 = NT$

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi kn/N} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

und die FOURIER- Transformierte der Gleichung (25) ergibt sich nach wenigen Umformungen zu

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (29)$$

Die Beziehung (29) verbindet N Abtastwerte einer Zeitfunktion mit N Abtastwerten einer Frequenzfunktion und wird als diskrete FOURIER- Transformation bezeichnet. Die Inverse diskrete FOURIER- Transformierte ist gegeben durch:

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{i2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (30)$$

Die diskrete FOURIER- Transformation ist also nur ein Spezialfall der kontinuierlichen FOURIER- Transformation, es gelten dieselben Eigenschaften wie in (5)...(10) sowie das Zeitbereichs- und Frequenzbereichs Faltungstheorem, (12) und (13), mit der diskreten Faltung.

4 Schnelle FOURIER-Transformation

4.1 Matrixdarstellung und Signalflußgraphen

Man betrachte die Beziehung der diskreten FOURIER- Transformation (29)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-i2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (31)$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise kt durch k und n/NT durch n ersetzt wurde. Beispielsweise erhalten wir für $N = 4$ und mit der Vereinbarung

$$W = e^{-i2\pi/N} \quad (32)$$

aus (31) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Bei näherer Betrachtung wird ersichtlich, dass zur Auswertung von (33) N^2 komplexe Multiplikationen und $N(N-1)$ komplexe Additionen erforderlich sind. Der Hauptgrund der Leistungsfähigkeit des FFT- Algorithmus ist die Faktorisierung von (33) zu

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{pmatrix} \quad (34)$$

wobei daran erinnert sein soll, dass $W^{nk} = W^{nk \bmod(N)}$ und $W^0 = 1$ ist. Die Berechnung von (34) erfordert nur vier komplexe Multiplikationen und acht komplexe Additionen(manche Multiplikationen wiederholen sich). Wenn man n und k als Binärzahl

$$k = 2k_1 + k_0 \quad n = 2n_1 + n_0 \quad (35)$$

darstellt erhält man für die faktorisierte Gleichung (34)

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left(\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \right) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (36)$$

wobei die Berechnung in der Klammer mit $x_1(n_0, k_0)$ bezeichnet sei und den nächsten Berechnungsschritt angibt. Jetzt sei bloß noch zu beachten, dass das Ergebniss in (34) durch die Matrixfaktorisierung umgeordnet wurde, dies stellt jedoch nur ein geringfügiges Problem dar. Wenn man das Argument n als Binärzahl darstellt, braucht man die $X(n)$ nur so umzuordnen, als wenn die Bits des Arguments, spiegelbildlich vertauscht wären. Eine häufig angewandte Form der Zwischenergebnissdarstellung sind Signalflussgraphen.

4.2 COOLEY-TUCKEY- Algorithmus für $N = 2^\gamma$

Für $N = 2^\gamma$ lassen sich n und k wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} n &= 2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0 \\ k &= 2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots + k_0 \end{aligned} \quad (37)$$

Unter Benutzung dieser Ausdrücke lässt sich (31) schreiben als

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^p \quad (38)$$

mit

$$p = (2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + \dots + n_0) \times (2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + \dots + k_0) \quad (39)$$

Da $W^{2^\gamma} = W^N = 1$ und $W^{a+b} = W^a W^b$ gilt schreibt man (38) zu

$$\begin{aligned} X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, \dots, k_0) \\ &\times W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})} W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}} \dots \\ &\times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (40)$$

Wenn man die einzelnen Summationen getrennt ausführt und die Zwischenergebnisse gesondert kennzeichnet, erhält man

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})} \\ x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \\ &\vdots \\ x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) &= \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) \\ &\times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)k_0} \\ X(n_{\gamma-1}, \dots, n_0) &= x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) \end{aligned} \quad (41)$$

Dieses sukzessive Gleichungssystem stellt die Ursprüngliche COOLEY-TUCKEY-Formulierung der FFT mit $N = 2^\gamma$ dar. Für $N = 2^\gamma$ besteht der FFT-Algorithmus einfach aus der Faktorisierung einer $N \times N$ Matrix in γ Matrizen der Größe $N \times N$, und zwar derart, dass die Anzahl der komplexen Multiplikationen und Additionen einer jeden Teilmatrix minimal ist.

4.3 Anmerkungen

Nun betrachte man die zur Auswertung von (41) benötigten Multiplikationen. Es gibt γ Summationsgleichungen, von denen jede N Gleichungen repräsentiert. Jede der letztgenannten Gleichungen benötigt zur Auswertung nur eine komplexe Multiplikation, da die erste Multiplikation stets die Form $W^{ak_{\gamma-i}}$ mit $k_{\gamma-i} = 0$ besitzt. Es kann gezeigt werden, dass bei der Berechnung einer Spalte stets die Beziehung $W^p = -W^{p+N/2}$ auftritt; deshalb reduziert sich die Anzahl der Multiplikationen weiter um den Faktor $1/2$. Die Gesamtzahl der komplexen Multiplikationen beträgt somit $N\gamma/2$. Die Anzahl der kompl. Additionen ist gleich $N\gamma$.

Es gibt eine Vielzahl von Varianten des FFT- Algorithmus. Sie machen sich spezielle Eigenschaften des zu transformierenden Signals und der Rechnerarchitektur zu Nutze. Beispielsweise der SANDE- TUCKEY- Algorithmus und FFT- Algorithmen mit beliebigen Basen. Es finden sich viele mehr oder weniger geeignete Werke über die FFT doch zum Abschluss möchte ich folgende empfehlen. Das ausführliche Buch [3] ist für den Anwender und Entwickler gleichermaßen gut geeignet. Die Folien im Anhang stammen allesamt aus [4], bei welchem im Gegensatz zu [3] der theoretische Teil kürzer abgefasst ist, allerdings wesentlich ausführlicher auf Anwendungen eingegangen wird. .

5 Literatur und Folien

Literatur

- [1] J.W. COOLEY and J.W. TUCKEY. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, Vol.19(No.90):pages 297–301, 1966.
- [2] R. PAPOULIS. *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [3] E.Oran BRIGHAM. *FFT*, volume 4. München: R.Oldenburg, 1989.
- [4] E.O. BRIGHAM. *FFT- Anwendungen*. München: R.Oldenburg, 1997.
- [5] BRONSTEIN SEMENDJAJEW MUSIOL MÜHLIG. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.

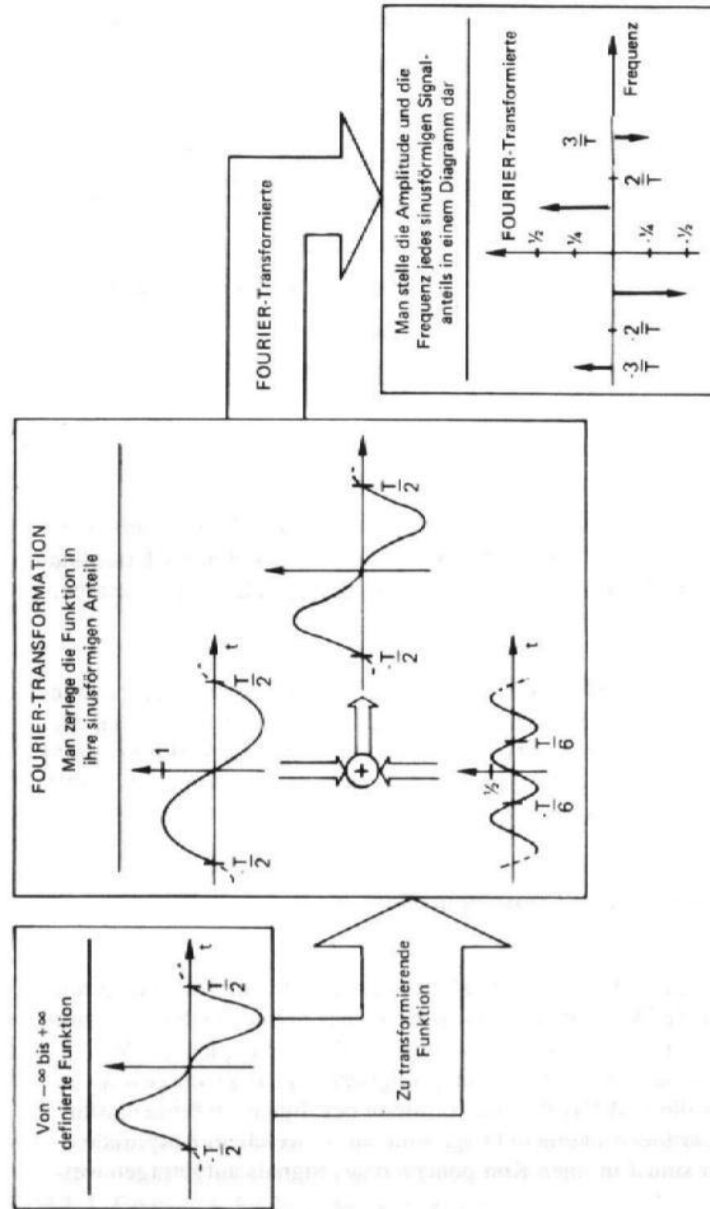


Abbildung 1: Interpretation der Fourier Transformation

Tabelle 6-1: Eigenschaften der kontinuierlichen und der diskreten FOURIER-Transformation

FOURIER-Transformation	Eigenschaft	Diskrete FOURIER-Transformation
$x(t) + y(t) \longleftrightarrow X(f) + Y(f)$	(3-2) Linearität	$x(k) + y(k) \longleftrightarrow X(n) + Y(n)$
$H(t) \longleftrightarrow h(-f)$	(3-6) Symmetrie	$\frac{1}{N} H(k) \longleftrightarrow h(-n)$
$h(t - t_0) \longleftrightarrow H(f) e^{-j2\pi f t_0}$	(3-21) Zeitverschiebung	$h(k - i) \longleftrightarrow H(n) e^{-j2\pi n i / N}$
$h(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow H(f - f_0)$	(3-23) Frequenzverschiebung	$h(k) e^{j2\pi k i / N} \longleftrightarrow H(n - i)$
$[\int_{-\infty}^{\infty} H^*(f) e^{-j2\pi f t} df]^*$	(3-25) Alternative Inversionsformel	$[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H^*(n) e^{-j2\pi k n i / N}]^*$
$h_e(t) \longleftrightarrow R_e(f)$	(3-27) Gerade Funktionen	$h_e(k) \longleftrightarrow R_e(n)$
$h_0(t) \longleftrightarrow jI_0(f)$	(3-32) Ungerade Funktionen	$h_0(k) \longleftrightarrow jI_0(n)$
$h(t) = h_e(t) + h_0(t) = [\frac{h(t)}{2} + \frac{h(-t)}{2}] + [\frac{h(t)}{2} - \frac{h(-t)}{2}]$	(3-33) Zerlegung	$h(k) = h_e(k) + h_0(k) = [\frac{h(k)}{2} + \frac{h(N-k)}{2}] + [\frac{h(k)}{2} - \frac{h(N-k)}{2}]$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$	(4-1) Faltung	$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(k - i) = x(k) * h(k)$
$y(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) H(f)$	(4-14) Zeitbereichs-Faltungstheorem	$y(k) * h(k) \longleftrightarrow Y(n) H(n)$
$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t + \tau) d\tau$	(4-21) Korrelation	$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(k + i) \longleftrightarrow H(n) X^*(n)$
$y(t) h(t) \longleftrightarrow Y(f) * H(f)$	(4-20) Frequenzbereichs-Faltungstheorem	$y(k) h(k) \longleftrightarrow \frac{1}{N} Y(n) * H(n)$
$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) ^2 df$	PARSEVALSches Theorem	$\sum_{k=0}^{N-1} h^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) ^2$

Abbildung 2: Eigenschaften der Fourier Transformation

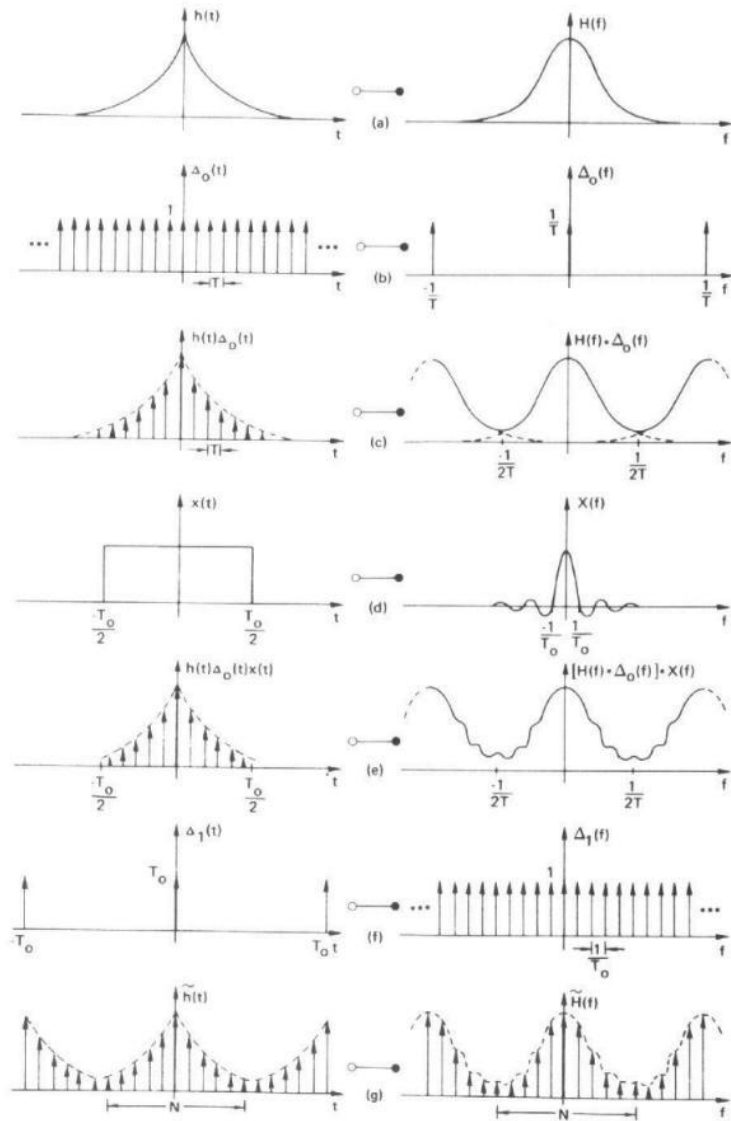


Abbildung 3: Zur Herleitung der DFT

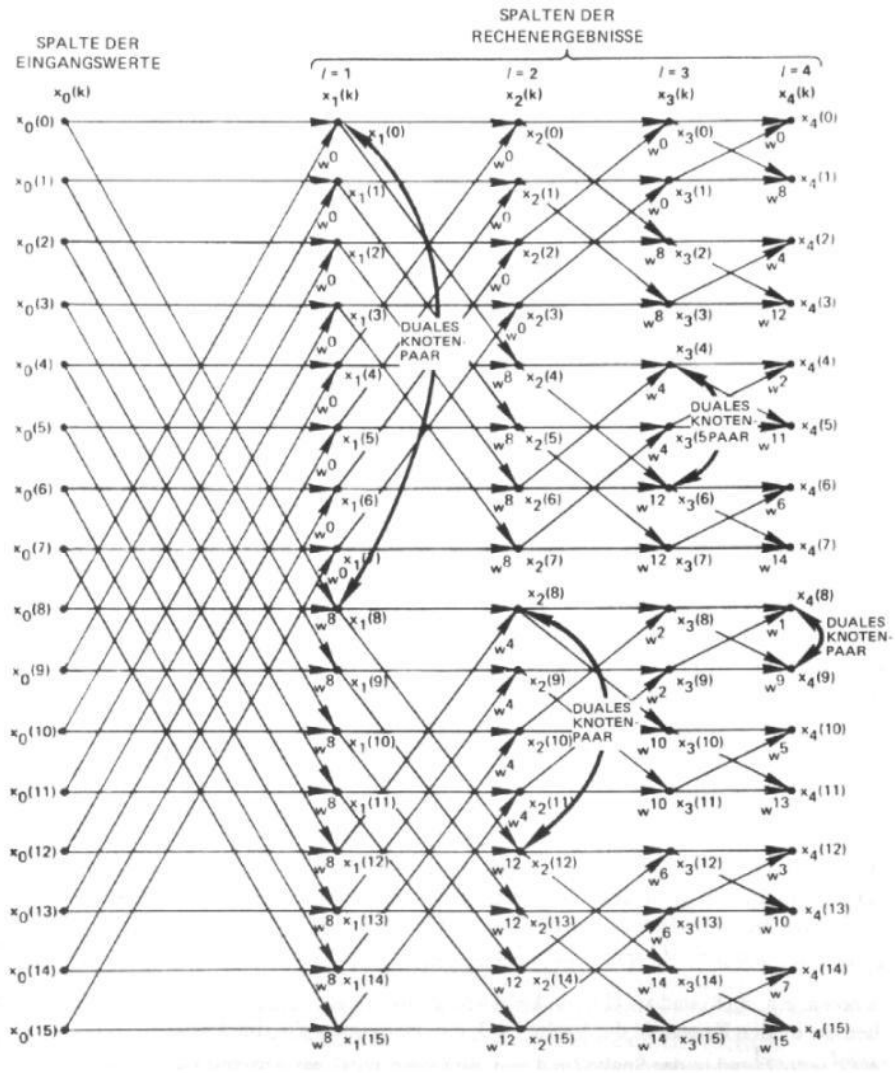


Abbildung 4: Signalflussgraph für $N=16$