Eigenwertprobleme
(Wiederholung aus der Linearen Algebra)

Betrachte (lineares) *Eigenwertproblem (EWP)*

(8.1) $$Ax = \lambda x, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \text{gegeben.}$$

Lösungspaare $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ liefern *Eigenwerte* (EW) λ und *Eigenvektoren* (EV) x, falls $x \neq 0$. Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, es gilt also

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Berechnung mittels char. Polynom numerisch nicht geeignet, siehe Beispiel 1.2:

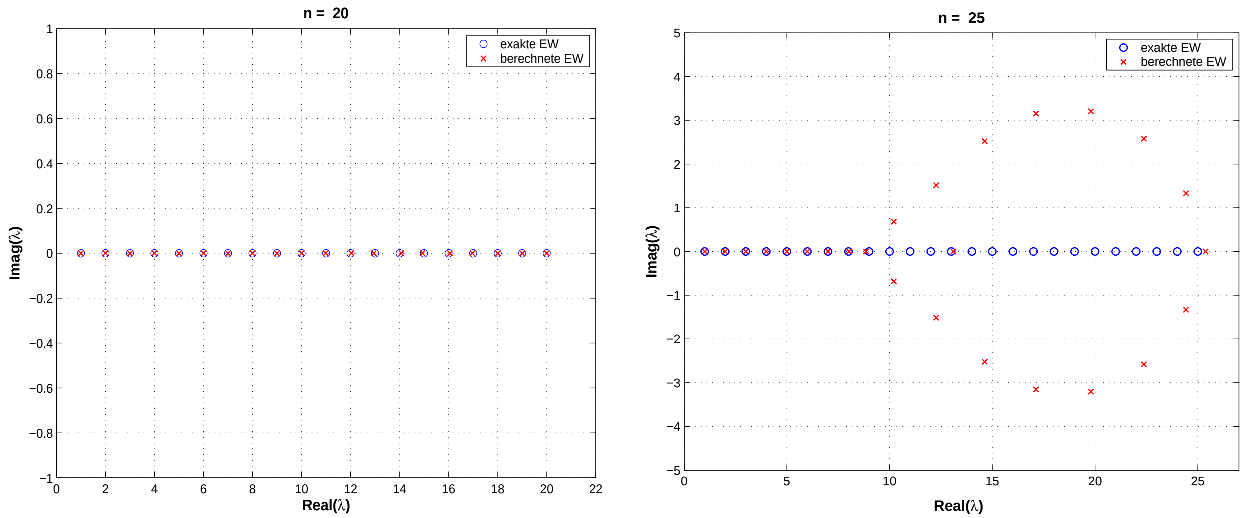

Abbildung 1: Exakte und mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnete Eigenwerte von $A = \operatorname{diag}(1, \ldots, n)$.

Bezeichnungen:

- $\Lambda(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \text{mit (8.1)}\} = \{ \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}_{\lambda_i = \lambda_j \quad \text{möglich}} \} =$ *Spektrum* von A.
- $\sigma(\lambda_j) =$ *algebraische Vielfachheit* von λ_j.
- $\rho(\lambda_j) =$ *geometrische Vielfachheit* von $\lambda_j =$ max. Anzahl linear unabh. EV zu λ_j.
- $\chi \subset \mathbb{C}^n$ heißt *A-invarianter UR*, falls $A\chi \subset \chi$ gilt (d.h. aus $x \in \chi$ folgt $Ax \in \chi$), bzw. falls $\exists X \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $\operatorname{Bild}(\chi) = X$ und $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$, wobei $k = \dim(\chi) = \operatorname{Rang}(X)$, mit $AX = XB$ und $\Lambda(B) \subset \Lambda(A)$.
- Ist $B = T^{-1}AT$, $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär, dann sind A, B *ähnlich* $(A \sim B)$.

  $\mathcal{T} : A \to T^{-1}AT$ heißt *Ähnlichkeitstransformation.*

  Es gilt: $A \sim B \;\Rightarrow\; \Lambda(A) = \Lambda(B)$.

Die Schur-Form

(Wiederholung aus der Linearen Algebra)

Satz 8.1 (Schurform) $\forall\, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *unitär mit*

$$U^H A U = T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(A) = \{t_{11}, \ldots, t_{nn}\}. \tag{8.2}$$

Dabei kann U so gewählt werden, dass die EW von A in beliebiger Reihenfolge auf der Diagonale von A erscheinen.

Definition 8.2 *(8.2) heißt* Schurzerlegung von A, T Schurform von A *und für* $U = [u_1, \ldots, u_n]$ *heißen die* $u_j \in \mathbb{C}^n$ Schurvektoren.

Beachte: $\mathcal{U}_k := \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$ sind A-invariant $\forall k = 1, \ldots, n$, aber nur u_1 ist EV von A (zu $\lambda = t_{11}$).

Bemerkung 8.3 *Für* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *kann man in reeller Arithmetik, also mit* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *orthogonal,* $T = \left[\ \diagdown\ \right]$ *nur dann erreichen, wenn* $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$. *Sonst ergeben sich* 2×2*-Blöcke auf der Diagonalen, die zu den konjugiert-komplexen Eigenwertepaaren* $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *gehören.*