Trigonometrische Interpolation

- **Trigonometrisches Polynom:**

$$P(x) := \beta_0 + \beta_1 e^{\imath x} + \ldots + \beta_{n-1} e^{(n-1)\imath x} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \omega^k =: p(\omega), \quad \omega := e^{\imath x}.$$

- **Trigonometrische Interpolationsaufgabe:**

  Für gegebene $f_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ($f_k = f(x_k)$ für 2π-periodische Funktion f), finde trigonometrisches Polynom mit

$$P(x_k) = f_k \quad \text{für} \quad x_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

  (Beachte: $P(x_k) = f_k \iff p(\omega_k) = f_k$ für $\omega_k := e^{\imath x_k} = e^{\imath \frac{2\pi k}{n}}$.)

- **Existenz- und Eindeutigkeitssatz der trigonometrischen Interpolation:**

  Es existiert eine eindeutige Lösung P der trigonometrischen Interpolationsaufgabe. Diese erfüllt

$$f_k = P(x_k) = p(\omega_k) \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

  Für die Koeffizienten des interpolierenden trigonometrischen Interpolationspolynoms gilt $\beta_j = [f, \Phi_j]$, wobei

$$\Phi_j := \left[\ \omega_0^j, \ \ldots, \omega_{n-1}^j\ \right]^T \in \mathbb{C}^n, \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad f := [f_0, \ldots, f_{n-1}]^T \in \mathbb{C}^n,$$

  und $[x, y] = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle = \frac{1}{n} y^H x \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$.

  (Beachte: $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}\}$ ist ONB des $\mathbb{C}^n$ bezüglich $[\cdot, \cdot]$.)

  Die Abbildung $f \to P$ heißt **diskrete Fouriertransformation (DFT)**, kurz $P = \mathrm{DFT}(f)$.

- **Best-Approximationseigenschaft der DFT:**

  Sei $\mathcal{T}_s := \{q(x) | q(x) = \sum_{j=0}^s \gamma_j e^{\imath j x}\}$, $0 \le s \le n-1$, die Menge der trigonometrischen Polynome vom Grad kleiner gleich s, P das trigonometrische Interpolationspolynom zu x_j, $j = 0, \ldots, n-1$ und $P_s(x) := \sum_{j=0}^s \beta_j e^{\imath j x}$.

  Dann gilt $\forall s = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\min_{q \in \mathcal{T}_s} \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - q(x_k)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f_k - P_s(x_k)|^2.$$

- **Diskrete reelle Fouriertransformation:**

$$\Psi(x) := \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\hat{n}} (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)), \quad \hat{n} = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade}, \\ \frac{n}{2} - 1, & n \text{ gerade}, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_j &:= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(kx_j) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(jx_k), \\ B_j &:= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin(kx_j) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin(jx_k). \end{aligned}$$

Es gilt $\Psi(x) = P(x)$, d.h. Ψ erfüllt die trigonometrische Interpolationsaufgabe, und

$$\begin{aligned} \beta_{n-j} &= \frac{1}{2}(A_j + \imath B_j), \\ \beta_j &= \frac{1}{2}(A_j - \imath B_j). \end{aligned}$$

- **Berechnung der DFT: Schnelle Fouriertransformation, FFT:**

Idee (Cooley-Tukey, 1965): Reduziere DFT für n Datensätze auf 2 DFT für je $\frac{n}{2}$ Datensätze, rekursive Anwendung ergibt $\mathcal{O}(n \log n)$ statt $\mathcal{O}(n^2)$ Flops. Mit $n = 2^m$:

$$\beta_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \omega_k^{-j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \underbrace{f_{2k}}_{=f_k^{(1)}} \omega_{2k}^{-j} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \underbrace{f_{2k+1}}_{=f_k^{(2)}} \omega_{2k+1}^{-j}.$$

Mit $\tilde{n} = \frac{n}{2}$ und $\omega_{2k}^{-j} = e^{-\imath \frac{2\pi 2k}{n} j} = e^{-\imath \frac{2\pi k}{\tilde{n}} j} =: \tilde{\omega}_k^{-j}$ folgt

$$\beta_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} f_k^{(1)} \tilde{\omega}_k^{-j} + \frac{1}{n} \omega_1^{-j} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} f_k^{(2)} \tilde{\omega}_k^{-j} =: \beta_j^{(1)} + \omega_1^{-j} \beta_j^{(2)},$$

und mit $\omega_1^{-j} = \omega_1^{-(j-\frac{n}{2})}$ gilt

$$\beta_j = \begin{cases} \beta_j^{(1)} + \omega_1^{-j} \beta_j^{(2)}, & j < \frac{n}{2}, \\ \beta_{j-\frac{n}{2}}^{(1)} - \omega_1^{j-\frac{n}{2}} \beta_{j-\frac{n}{2}}^{(2)}, & j \geq \frac{n}{2}. \end{cases}$$