# Newton-Verfahren

- **Konvergenzordnung:**

  Eine Folge $\{x^{(j)}\}_{j=0}^{\infty}$ für die $\exists p \geq 1, c \geq 0$ (mit $c < 1$ für $p = 1$), so daß

  $$\|x^{(j+1)} - x^*\| \leq c\|x^{(j)} - x^*\|^p, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

  heißt **(Q-)konvergent von $p$-ter Ordnung**.
  $p = 1$: **lineare Konvergenz**,
  $p = 2$: **quadratische Konvergenz**,
  $p = 3$: **kubische Konvergenz**.

  **Superlineare Konvergenz** (schneller als linear):

  $$\lim_{j \to \infty} \frac{\|x^{(j+1)} - x^*\|}{\|x^{(j)} - x^*\|} = 0.$$

  Beachte: Konvergente Fixpunktiteration ist mindestens linear konvergent.

- **Idee des Newton-Verfahrens** für $f(x) = 0$:

  – **geometrisch:** Ersetze $f$ durch Tangente an $f$ in $x^{(0)}$ und bestimme die Schnittstelle mit der $x$-Achse. Iteriere diesen Prozeß, bis $\|f(x)\|$ klein genug.

  – **analytisch:** Ersetze $f$ durch Taylorpolynom (Entwicklung um $x^{(0)}$) vom Grad 1 und bestimme die Nullstelle. Iteriere diesen Prozeß, bis $\|f(x)\|$ klein genug.

- **Newton-Verfahren:**

  $$x^{(j+1)} = x^{(j)} - \left(Df(x^{(j)})\right)^{-1} f(x^{(j)}) \tag{4.6}$$

  Algorithmus:

  $$\begin{array}{rrcll} \text{WHILE } \|f(x)\| & & > & \eta & (\eta = \text{geg. Toleranz}) \\ & b & := & f(x) & \\ & J & := & Df(x) & \\ \text{Löse} & J\delta & = & -b & \text{mit LR-Zerlegung etc.} \\ & x & := & x + \delta & \\ \text{END WHILE} & & & & \end{array}$$

- **Satz 4.8:**

  Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, offen. Weiter sei $Df(x^*)$ regulär und es existieren Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ derart, daß

  (i) $\|Df(x^*)^{-1}\| \leq \alpha$,

  (ii) $\|Df(x) - Df(y)\| \leq \beta\|x - y\| \quad \forall x, y \in B(x^*, \gamma)$,

  wobei $\|\cdot\|$ eine konsistente Norm sei. Dann existiert $\delta > 0$ so, daß $\forall x^{(0)} \in B(x^*, \delta)$ die durch (4.6) generierte Folge eindeutig bestimmt ist mit $\lim_{j\to\infty} x^{(j)} = x^*$ und quadratische Konvergenz vorliegt:

  $$\|x^{(j+1)} - x^*\| \leq \alpha\beta\|x^{(j)} - x^*\|^2. \tag{4.7}$$

  (Hier, $B(x^*, r) := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x^*\| < r\}$.)

  Also: Konvergenz des Newton-Verfahrens ist quadratisch, aber nur lokal!

- **Gedämpftes Newton-Verfahren:**

  Idee: $d^{(j)} = -\left(Df(x^{(j)})\right)^{-1} f(x^{(j)})$ ist Abstiegsrichtung für $g(x) = \|f(x)\|_2^2$ ausgehend von $x^{(j)}$ $\Rightarrow$ unter weiteren Vor. erhält man globale Konvergenz mit

  $$x^{(j+1)} = x^{(j)} + \lambda_j d^{(j)} \quad \lambda_j \in (\lambda_{\min}, 1],\ \lambda_{\min} > 0.$$

- **Vereinfachtes Newton-Verfahren:**

  $$x^{(j+1)} = x^{(j)} - J^{-1}f(x^{(j)}), \quad J = Df(x^{(0)})$$

  (ggf. zyklisches Aufdatieren von $J \rightsquigarrow$ **Newton-Shamanskii-Verfahren**).

- **Approximation des Jacobi-Matrix:**

  – Ersetze partielle Ableitungen durch Differenzenquotienten, d.h.,

  $$Df(x) = \left[\ldots, \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \ldots\right] \approx \left[\ldots, \frac{1}{h_k}(f(x + h_k e_k) - f(x)), \ldots\right] =: \Delta f(x).$$

  – **Broyden-Rang-1 Aufdatierung:**

  $x^{(j+1)} = x^{(j)} + w^{(j)}$, $w^{(j)} = -B_j^{-1} f(x^{(j)})$, wobei $B_0 \in \{Df(x^{(0)}), \Delta f(x^{(0)})\}$,

  $$B_{j+1} := B_j + \frac{1}{w^{(j)T} w^{(j)}} f(x^{(j+1)}) w^{(j)T}.$$