Nichtlineare Gleichungssysteme

- **Nullstelle:**

  Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix},$$

  dann ist $x = \begin{bmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}^T \in D$ **Nullstelle von** f, falls $f(x) = 0$.

- **Fixpunkt:**

  Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix},$$

  dann ist $x = \begin{bmatrix} x_1, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}^T \in D$ **Fixpunkt von** Φ **in** D, falls $\Phi(x) = x$.

- **Nullstelle $\Leftrightarrow$ Fixpunkt:**

$$x \text{ Nullstelle von } f \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ Fixpunkt von } \Phi \text{ für } \Phi(x) = f(x) + x.$$

- **Fixpunktiteration:** Sei $x^{(0)} \in D$ gegeben, dann iteriere

$$x^{(j+1)} = \Phi(x^{(j)}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

- **Satz 4.3: (Banach'scher Fixpunktsatz):**
  Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$

  (i) **selbstabbildend**, d.h.

$$\Phi(D) \subset D \quad (\Leftrightarrow \forall x \in D : \Phi(x) \in D)$$

  (ii) und **kontrahierend (kontraktiv)**, d.h. $\exists\, \alpha < 1$ und Norm $\|\cdot\|$, so daß

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad \forall x, y \in D,$$

  (Φ erfüllt Lipschitz-Bedingung mit Konstante $\alpha < 1$).

  Dann gilt

  (a) $\exists!$ Fixpunkt x^* von Φ in D.

  (b) $\lim_{j \to \infty} x^{(j)} = x^*$ für $x^{(j)}$ aus (4.3) und $\forall x^{(0)} \in D$.

  (c) Es gelten die Fehlerabschätzungen

  (i) $\|x^* - x^{(m)}\| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$ (**a priori**),

  (ii) $\|x^* - x^{(m)}\| \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|$ (**a posteriori**).