QR-Zerlegung

- **Definition:** Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt
$$A = QR, \quad Q \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ orthogonal}, \quad R \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ obere Dreiecksmatrix},$$
QR Zerlegung von A.

- Die Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe einer QR Zerlegung,
$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; QRx = b \;\Leftrightarrow\; Rx = Q^T b =: \tilde{b} \;\rightsquigarrow\; \text{Rückwärtseinsetzen},$$
ist numerisch rückwärts stabil.

- **Berechnung der QR Zerlegung:**
  - (modifizierte) Gram-Schmidt-Orthogonalisierung der Spalten von A,
  - *Householder QR-Zerlegung,*
  - Givens QR-Zerlegung.

- **Householder QR-Zerlegung:**
Verwendet orthogonale Eliminationsmatrizen H_k mit
$$H_k x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ \hat{x}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =: \hat{x}.$$
wobei $H_k := \begin{bmatrix} I_{n-k+1} & \\ & P(v^{(k)}) \end{bmatrix}$. Dabei ist
$$P(v) := P := I_n - \frac{2}{v^T v} v v^T$$
die **Householder-Matrix** zum **Householder-Vektor** v.
Hier: $v^{(k)} = x^{(k)} + \text{sign}(x_1^{(k)}) \|x^{(k)}\|_2 e_1$ mit $x^{(k)} = [x_k, \ldots, x_m]^T$.

- **Anwendung von Householder-Matrizen**
  - PB für $P \in \mathbb{R}^{k\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times m}$: Mit $\beta = -\frac{2}{v^T v}$ gilt:
    $$PB = (I + \beta vv^T)B = B + vw^T,\ w = \beta B^T v.$$
    Kosten: $4mk$ anstatt $2mk^2$ für Matrix-Matrix-Multiplikation.
  - Analog: $BP = B + wv^T$, $w = \beta Bv$.
  - Numerische Stabilität:
    $$\begin{aligned} B \odot P &= (B + \Delta B)P, \quad \|\Delta B\|_2 \approx \mathbf{u}\|B\|_2, \\ P \odot B &= P(B + \Delta B), \quad \|\Delta B\|_2 \approx \mathbf{u}\|B\|_2. \end{aligned}$$

- **Speicherung des Householder-Vektors:**

  Kann im eliminierten Bereich der Matrix/des Vektors erfolgen, bei Normierung auf $v_1 = 1$ speichere im Vektor x (bzw. der entsprechenden Spalte von A ab dem Diagonalelement)
  $$x \leftarrow [-\operatorname{sign}(x_1)\|x\|_2, v_2, \dots, v_n]^T.$$
  Zusätzlich wird noch $\beta = -\frac{2}{v^T v}$ gespeichert.