Fehleranalyse der Lösung linearer Gleichungssysteme mit LR-Zerlegung

- **Fehleranalyse der LR-Zerlegung (Satz 3.21):**

  Sei $\gamma(A) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es seien während der numerischen Berechnung der LR-Zerlegung in $\mathbb{M}(p,t,e_{\min},e_{\max})$ mit Maschinengenauigkeit $\mathbf{u}$ alle Pivotelemente $\hat{a}_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, dann gilt

  $$\hat{L}\cdot\hat{R} = A + H, \quad |H| \leq 3(n-1)\mathbf{u}(|A| + |\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).$$

  Folgerung: Da $|\hat{R}| \gg |A|$ möglich ist[1], ist die Berechnung der LR-Zerlegung mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren nicht numerisch rückwärts stabil.

- **Gesamtfehleranalyse für LR-Zerlegung und Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen (Satz 3.22):**

  Sei $\hat{x}$ die durch LR-Zerlegung und Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen unter den Voraussetzungen wie in Satz 3.21 berechnete Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

  $$(A+E)\hat{x} = b, \quad |E| \leq n\mathbf{u}(3|A| + 5|\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).$$

  Damit folgt für den normweisen relativen Rückwärtsfehler

  $$\eta_{\text{rel}} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 3n\mathbf{u} + 5n\mathbf{u}\|\hat{L}\|_\infty \frac{\|\hat{R}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)$$

  und für den relativen Vorwärtsfehler

  $$\frac{\|x-\hat{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4\left(3 + 5\frac{\|\hat{L}\|_\infty\|\hat{R}\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right) n\mathbf{u}\kappa_\infty(A) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).$$

  Folgerung: Da $\|\hat{R}\|_\infty \gg \|A\|_\infty$ möglich ist[1], ist das Lösen linearer Gleichungssysteme mit LR Zerlegung bzw. Gaußschem Eliminationsverfahren nicht numerisch rückwärts stabil.

---

[1] Beachte: Ohne Pivotisierung ist auch $|\hat{L}| \gg |A|$ und $\|\hat{L}\|_\infty \gg \|A\|_\infty$ möglich!