Störungstheorie bei linearen Gleichungssystemen

- ***Lokale* Störungsanalyse:**

  Für
  $$(A + \Delta A)\hat{x} = b + \Delta b, \quad \|\Delta A\| \leq \delta\|A\|,\ \|\Delta b\| \leq \delta\|b\|, \tag{1}$$
  gilt mit $\kappa(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$:
  $$\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) + \mathcal{O}(\delta^2) \leq 2\delta\kappa(A) + \mathcal{O}(\delta^2).$$

- **Konditionszahl einer Matrix A:**

  $$\begin{aligned}
  \kappa_1(A) &:= \|A\|_1\|A^{-1}\|_1 && (= \texttt{cond(A,1)} \quad \text{in MATLAB}),\\
  \kappa_2(A) &:= \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 && (= \texttt{cond(A,2)} \quad \text{in MATLAB}),\\
  \kappa_F(A) &:= \|A\|_F\|A^{-1}\|_F && (= \texttt{cond(A,'fro')} \quad \text{in MATLAB}),\\
  \kappa_\infty(A) &:= \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty && (= \texttt{cond(A,inf)} \quad \text{in MATLAB}).
  \end{aligned}$$

- **Lemma 3.14: (Neumannsche Reihe:)**

  Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ konsistente Matrixnorm (d.h. $\exists$ Vektornorm $\|\cdot\|$ mit $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$). Falls $\|A\| < 1$, so ist $I - A$ invertierbar und es gilt
  $$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

- **Satz 3.16: (Nichtlokaler Störungssatz)**

  Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $Ax = b$ und $\hat{x}$ erfülle (1) mit $\|\Delta A\| \leq \delta\|A\|$, $\|\Delta b\| \leq \delta\|b\|$, sowie $\delta\kappa(A) < 1$. Dann ist
  $$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{2\delta\kappa(A)}{1 - \delta\kappa(A)}.$$

- **(Bauer-)Skeel-Konditionszahl:**

  $$\kappa^S(A) := \kappa^S_{\|\cdot\|}(A) := \||A^{-1}| \cdot |A|\|.$$
  bzw. $\kappa^S_p(A)$, $p \in \{1, 2, F, \infty\}$ mit $\kappa^S_\infty(A) \equiv \min\{\kappa_\infty(DA) \mid D \text{ diagonal}\}$.

  Satz 3.16 gilt entsprechend mit κ ersetzt durch κ^S_∞ für komponentenweise Störungsanalyse und $\| \,.\, \| \equiv \| \,.\, \|_\infty$.