Fehleranalyse

Betrachte $y = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $y \in W \subset \mathbb{R}^m$, sowie berechnetes Ergebnis

$$\hat{y} = y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

- **Vorwärtsfehler,**
  - **absolut:** $\|y - \hat{y}\|$,
  - **relativ:** $\|y - \hat{y}\| / \|y\|$,

  wird durch **Vorwärtsanalyse** abgeschätzt.

- **Rückwärtsfehler,**
  - **absolut:** η,
  - **relativ:** $\eta / \|x\|$,

  mit $\eta := \inf\{\|\Delta x\|; \hat{y} = f(x + \Delta x)\}$,

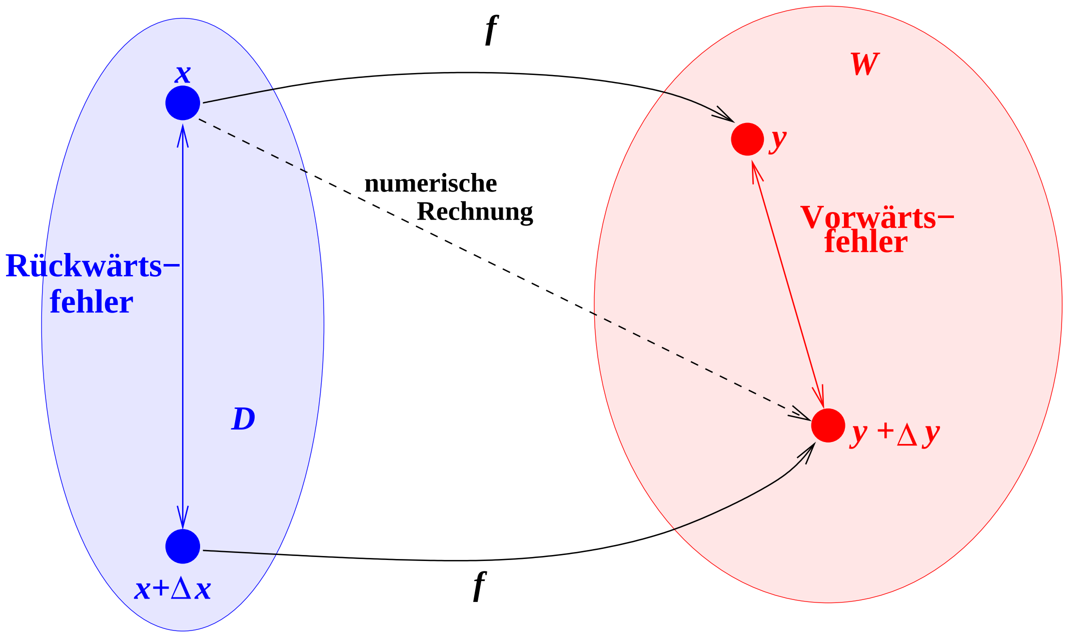
  wird durch **Rückwärtsanalyse** abgeschätzt.

- **Numerische Stabilität** (eines Algorithmus':)

  Algorithmus, der rel. Rückwärtsfehler von der Größenordnung der rel. Datenfehler $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ liefert, heißt **(numerisch) rückwärts stabil**.

  Algorithmus, der rel. Vorwärtsfehler von der Größenordnung liefert, den ein rückwärts stabiler Algorithmus liefern würde, heißt **(numerisch) vorwärts stabil**.

- **rückwärts stabil $\Longrightarrow$ vorwärts stabil**



- **Konditionszahl,**
  - **absolute:** Kleinste Zahl $c_{\text{abs}}(f, x)$, für die
    $$\|y - \hat{y}\| \leq c_{\text{abs}}(f, x)\|\Delta x\| + o(\|\Delta x\|)$$
    gilt;
  - **relative:** Kleinste Zahl $c(f, x) = c_{\text{rel}}(f, x)$, für die
    $$\frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \leq c_{\text{rel}}(f, x)\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\right)$$
    gilt
- Ist f differenzierbar, dann gilt
  $$c_{\text{abs}}(f, x) = \|f'(x)\|, \quad c(f, x) = c_{\text{rel}}(f, x) = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}\|f'(x)\|,$$
  wobei f' der Jacobimatrix von f in x entspricht und $\|f'(x)\|$ die von den gewählten Vektornormen induzierte Operatornorm bezeichnet.
- **gut/schlecht konditioniert:**
  $c(x) \approx 1 \quad \Rightarrow \quad$ gut konditioniert.
  $c(x) \gg 1 \quad \Rightarrow \quad$ schlecht konditioniert.
  $c(x) \ll 1$ kann auch schlecht sein wegen des „Verlusts der Information“ über einen möglicherweise großen Rückwärtsfehler.
- **Faustregel 1:**
  $$\text{Vorwärtsfehler} \precsim \text{Konditionszahl} \times \text{Rückwärtsfehler}$$
- **Faustregel 2:**
  Gute Kondition & stabiler Algorithmus $\Rightarrow$ zuverlässiges Ergebnis.
  Schlechte Kondition *oder* instabiler Algorithmus $\Rightarrow$ unsicheres Ergebnis.