**Satz III.7:**
$A$ besitzt eine eindeutige LR-Zerlegung mit invertierbarem $R$ genau dann wenn

$$\det(A(1:k,1:k)) \neq 0 \qquad \forall k = 1,\ldots,n.$$

*Beweis:* Es gilt

$$\begin{aligned}
A^{(k)} &= \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1k}^{(0)} & \\ & \ddots & & * \\ & & a_{kk}^{(k-1)} & \\ \hline & & & A_{22}^{(k)} \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(k)} & * \\ \hline 0 & A_{22}^{(k)} \end{array}\right] \\
&= M_k M_{k-1} \cdots M_2 M_1 \cdot A^{(0)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -l_{21} & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 1 & & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & & \\ -l_{n1} & \cdots & -l_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A_{11}^{(k)} = L_{11} A_{11}. \tag{3.7}$$

Aus der Existenz der LR-Zerlegung mit invertierbarem $R$ folgt $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ $\forall k = 1,\ldots,n-1$ und damit

$$\det A_{11}^{(k)} = \prod_{j=1}^{k} a_{jj}^{(j-1)} \neq 0.$$

Wegen (3.7) gilt also

$$\underbrace{\det L_{11}}_{=1} \det(A(1:k,1:k)) \neq 0$$

und somit

$$\det(A(1:k,1:k)) \neq 0 \quad \forall k = 1,\dots,n-1.$$

Für $k = n$ gilt: Falls $a_{nn}^{(n-1)} = 0$, dann wäre $0 = \det A^{(n-1)} = \det R$, was zum Widerspruch führt, denn nach Voraussetzung ist $R$ invertierbar. Also folgt

$$0 \neq \det A^{(n-1)} = \det\left(M_{n-1}\cdots M_1 A\right) = \det A,$$

da $\det M_k = 1$ für $k = 1,\dots,n-1$.
Die Rückrichtung zeigt man mit Induktion über $k$.
*Induktionsanfang* $k = 1$*:*

$$A(1:1,1:1) = a_{11} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{(1)} = M_1 A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(0)} & * \\ \hline 0 & A_{22}^{(1)} \end{array}\right].$$

*Induktionsschritt* $k-1 \to k$*:* Die Gleichung (3.7) gilt auch für $A^{(k-1)}$ mit analoger Partitionierung. Daraus erhält man

$$0 \neq \det A_{11} = \underbrace{\det L_{11}}_{=1} \det A_{11} = \det(L_{11}A_{11}) = \det \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & & a_{1k}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Also $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ und damit ist der $k$-te Eliminationschritt durchführbar und die LR-Zerlegung existiert.
Zur Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei $A = L_1 R_1 = L_2 R_2$. Dann gilt wegen $\det A \neq 0$ auch $\det R_1 \neq 0$, und mit $\det L_2 = 1 \neq 0$ folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = L_2^{-1} L_1 \;=\; R_2 R_1^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$L_2^{-1} L_1 = R_2 R_1^{-1} = I_n, \quad \text{also} \quad L_1 = L_2 \quad \text{und} \quad R_1 = R_2.$$

$\square$