Satz 3.21:
Sei $\gamma(A) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es seien während der numerischen Berechnung der LR-Zerlegung in $\mathbb{M}(p,t,e_{\min},e_{\max})$ mit Maschinengenauigkeit $\mathbf{u}$ alle Pivotelemente $\hat{a}_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, dann gilt

$$\hat{L}\cdot\hat{R} = A + H, \quad |H| \leq 3(n-1)\mathbf{u}(|A| + |\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).$$

Beweis: (Mit vollständiger Induktion über n.)
<u>Induktionsanfang, $n=1$:</u> $\hat{l}_{11} = 1$, $\hat{r}_{11} = a_{11}$, also $h_{11} = 0$.
<u>Induktionsschritt, $n-1 \to n$:</u> Sei $A =: \begin{bmatrix} \alpha & \omega^T \\ v & B \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.
Der erste Schritt der Gauß-Elimination ergibt:

$$\hat{t} := \begin{bmatrix} v_1 \oslash \alpha \\ \vdots \\ v_{n-1} \oslash \alpha \end{bmatrix}, \quad \hat{A}^{(1)} = B \ominus (\hat{t} \odot \omega^T).$$

Es gilt

$$\hat{t} = t + f, \quad |f| \leq \mathbf{u}|t| = \mathbf{u}\frac{1}{|\alpha|}|v| \tag{3.15}$$

und

$$\hat{A}^{(1)} = B - \hat{t}\omega^T + F, \quad |F| \leq 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2). \tag{3.16}$$

Zu Gleichung (3.16):

$$\begin{aligned} \hat{A}^{(1)} &= B \ominus (\hat{t} \odot \omega^T) = \left(B - \hat{t}\cdot\omega^T(1+\varepsilon)\right)(1+\delta), \quad |\varepsilon|, |\delta| \leq \mathbf{u} \\ &= B - \hat{t}\omega^T + \underbrace{\delta B - \varepsilon\hat{t}\omega^T - \delta\hat{t}\omega^T - \varepsilon\delta\hat{t}\omega^T}_{=:F}. \end{aligned}$$

Also folgt bei komponentenweiser Betrachtung

$$\begin{aligned} |F| &\leq |\delta||B| + |\varepsilon||\hat{t}||\omega^T| + |\delta||\hat{t}|\omega^T| + |\varepsilon||\delta||\hat{t}||\omega^T| \\ &\leq \mathbf{u}|B| + 2\mathbf{u}|\hat{t}||\omega^T| + \mathbf{u}^2|\hat{t}||\omega^T| \\ &\leq 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega^T|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2), \end{aligned}$$

d.h. (3.16).
Dann berechne die LR-Zerlegung von $\hat{A}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\hat{L}_1\cdot\hat{R}_1 = \hat{A}^{(1)} + H_1, \quad |H_1| \leq 3(n-2)\mathbf{u}(|\hat{A}^{(1)}| + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2). \tag{3.17}$$

Nun gilt mit (3.15)

$$\hat{L}\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{t} & \hat{L}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \omega^T \\ 0 & \hat{R}_1 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha f & H_1 + F \end{bmatrix} =: A + H.$$

Mit (3.16) folgt

$$\begin{aligned}
|\hat{A}^{(1)}| \quad &\leq \quad |B| + |\hat{t}||\omega^T| + 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&= \quad (1+2\mathbf{u})(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
\Rightarrow\ |H_1 + F| \quad &\leq \quad |H_1| + |F| \\
&\overset{(3.16),(3.17)}{\leq} \quad 3(n-2)\mathbf{u}(|\hat{A}^{(1)}| + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|) + 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&\leq \quad 3(n-2)\mathbf{u}\{(1+2\mathbf{u})(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|\} + \\
&\qquad\qquad 2\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&= \quad \underbrace{(3(n-2)+2)}_{\leq 3(n-1)}\mathbf{u}(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + 3\underbrace{(n-2)}_{<n-1}\mathbf{u}|\hat{L}_1||\hat{R}_1|\} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&\leq \quad 3(n-1)\mathbf{u}\{(|B| + |\hat{t}||\omega|^T) + |\hat{L}_1||\hat{R}_1|\} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man für $n > 1$

$$|\alpha f| \;\leq\; |\alpha||f| \overset{(3.15)}{\leq} \mathbf{u}|v| \leq 3(n-1)\mathbf{u}|v|$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned}
|H| \;&=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |\alpha f| & |H_1 + F| \end{bmatrix} \\
&\leq\; 3(n-1)\mathbf{u}\left\{\begin{bmatrix} |\alpha| & |\omega|^T \\ |v| & |B| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ |\hat{t}| & |\hat{L}_1| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |\alpha| & |\omega|^T| \\ 0 & |\hat{R}_1| \end{bmatrix}\right\} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2) \\
&=\; 3(n-1)\mathbf{u}(|A| + |\hat{L}||\hat{R}|) + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2).
\end{aligned}$$

□