

Francis QR Algorithmus

INPUT: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Toleranz tol .

OUTPUT: $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Schurform von A ; $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal so, daß $H = Q^T A Q$.

1: Berechne $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so daß $H = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \square & \\ & & \square \end{bmatrix}$.

2: $q := 0$.

3: **while** $q < n$ **do**

4: Bestimme alle $j \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$h_{j+1,j} \leq tol \cdot \mathbf{u}(|h_{jj} + |h_{j+1,j+1}|).$$

Für diese j , setze $h_{j+1,j} := 0$.

5: **Deflation:** Finde $p, q \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit p minimal und q maximal so daß

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ & H_{22} & H_{23} \\ & & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown & \square & \square \\ & \diagdown & \square \\ & & \diagdown \end{bmatrix},$$

wobei $H_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ obere Hessenbergmatrix, $H_{22} \in \mathbb{R}^{n-p-q \times n-p-q}$ unreduzierte obere Hessenbergmatrix, $H_{33} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ quasi-obere Dreiecksmatrix.

6: Bringe H_{33} in obere Schur-Form, $H_{33} := Q_{33}^T H_{33} Q_{33}$.

$$H_{12} := H_{12} Q_{33}, \quad H_{13} := H_{13} Q_{33}.$$

$$Q := Q \cdot \text{diag}(I_p, I_{n-p-q}, Q_{33}).$$

7:

8: **if** $q < n$ **then**

9: Führe einen impliziten Francis QR Schritt für H_{22} aus und setze $H_{22} := Q_{22}^T H_{22} Q_{22}$, wobei Q_{22} die orthogonale Transformationsmatrix aus dem QR Schritt ist.

$$H_{12} := H_{12} Q_{22}, \quad H_{23} := Q_{22} H_{23}.$$

$$Q := Q \cdot \text{diag}(I_p, Q_{22}, I_q).$$

10: **end if**

11: **end while**