Beispiel 2.16 (Beispiel 2.13 fortgesetzt)

Wir nehmen an, daß $y_1 = a - \sqrt{a^2 - b}$ und $\hat{y}_1$ die entsprechende Lösung der gestörten quadratischen Gleichung

$$y^2 - 2(a + \Delta a)y + (b + \Delta b) = 0$$

ist. Für die Rückwärtsfehleranalyse benötigen wir einen Ausdruck der Form

$$\hat{y}_1 = (a + \Delta a) - \sqrt{(a + \Delta a)^2 - (b + \Delta b)}.$$

Wie bei der Vorwärtsanalyse in Beispiel 2.13 erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= a(1+\delta_4) - \{a^2 \underbrace{(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3)^2}_{\substack{=1+\delta_1+\delta_2+2\delta_3+\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)\\ =:1+\varepsilon_1, \quad |\varepsilon_1|\le 4\mathbf{u}+\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)}}(1+\delta_4)^2 - b\underbrace{(1+\delta_1)(1+\delta_3)^2(1+\delta_4)^2}_{=:1+\varepsilon_2, \quad |\varepsilon_2|\le 5\mathbf{u}+\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)}\}^{\frac{1}{2}} \\
&= a + a\delta_4 - \{(a + a\delta_4)^2 - b\,(\underbrace{1 + \varepsilon_2 - \frac{a^2}{b}\varepsilon_1(1+\delta_4)^2}_{\substack{=1+\varepsilon_2-\frac{a^2}{b}\varepsilon_1+\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)\\ =:1+\delta_b,\ |\delta_b|\le 5\mathbf{u}+\frac{4a^2}{|b|}\mathbf{u}+\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)}})\}^{\frac{1}{2}} \\
&= (a + a\delta_4) - \sqrt{(a + a\delta_4)^2 - (b + b\delta_b)}
\end{aligned}$$

Wir können nun $\Delta a := a\delta_4$, $\Delta b := b\delta_b$ setzen und damit den relativen Rückwärtsfehler nach oben abschätzen, wobei zu beachten ist, daß der Rückwärtsfehler als Infimum aller möglichen Δx definiert ist:

$$\begin{aligned}
\frac{|\eta_a|}{|a|} &\le \frac{|\Delta a|}{|a|} \le |\delta_4| \le \mathbf{u} \\
\frac{|\eta_b|}{|b|} &\le |\delta_b| \le \underbrace{\left(5 + \frac{4a^2}{|b|}\right)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2)
\end{aligned}$$

Einen kleinen Rückwärtsfehler, wie man ihn bei einem numerisch rückwärts stabilen Algorithmus erwarten würde, erhalten wir falls $a^2 \approx |b|$. Ein großer Fehler ist möglich für $a^2 \gg b$.