Brückenkurs – Theoretische Physik

Dr. Janett Prehl
janett.prehl@physik.tu-chemnitz.de
Raum C60.212, Telefon 0371-531-35612

Vorlesungsskript

– Wofür brauchen wir Mathematik in der Physik? –

1.1 Einführung

Online-Brückkurse: Hilfestellung zur Wiederholung Schulstoff:

- Mathematik:
  - TU Chemnitz: Opal TU Chemnitz → Mathematik → Online-Brückenkurs
    `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/8215396360?14`
  - Empfehlung DPG:
    `https://www.ombplus.de/ombplus/public/index.html?org=fubphysik`
- Physik:
  `https://lx3.mint-kolleg.kit.edu/onlinekursphysik/html/sectionx3.1.0.html` (von vielen Unis entwickelt - RWTH Aachen, TU Berlin, Uni Hamburg, ...)

1.1.1 Kernaufgabe der Physik

Physik: (siehe S. Holzner *"Physik für Dummies"* (2020) Wiley-VCH Weinheim)

→ Beobachtung der "Realität"
→ Erfinden/ Herleiten eines Models der Beobachtung
→ Formulierung des Models in *mathematischer Sprache*
→ Vorhersagen was unter bestimmten Voraussetzungen geschieht

Aber:

- Nicht von Mathematik einschüchtern lassen, Mathematik soll das Leben vereinfachen.
- Versuchen Sie immer die Phänomene im Kopf zu behalten. Physik beschreibt Phänomene, daher beschreiben auch die Formeln Phänomene.

Experimentalphysik: Messen (Konzeption, Präparation, Registrierung) und Bestimmung/ Berechnung von physikalischen Größen, die durch experimentelle Aufbauten in der Realität verifiziert werden.

Wichtig: Versuche möglichst reproduzierbar, störungsfrei, übersichtlich, gleich

Bsp.: Freier Fall

Durchführen vieler Test (unterschiedliche Höhen, Massen, Dichten, Oberflächen, ...)
→ Herleiten von empirischen Gesetzmäßigkeiten und Konstanten (Beschleunigungen, Widerstandswerten) aus Messpunkten

Theoretische Physik: Entwicklung, Berechnung und Simulation von Konzepten zur Bestimmung physikalischen Größen, die die Realität widerspiegeln, aber zunächst nicht zwingend durch Experimente verifiziert werden können.

Bsp.: Freier Fall

Model zur Realität aufstellen, Formeln herleiten
Herleitung über 2. Newton'sche Axiom + Superpositionsprinzip: $\vec{F} = m\,a = \sum_n \vec{F}_n$
$\rightarrow$ Vgl. wenn möglich mit Realität bzw. draus Vorhersagen ableiten, so dass es überprüfbar wird

Hinweis: Keine Scharfe Grenze zwischen experimental- und theoretischer Physik, ändert sich mit Zeit und Standard-Wissen

- Euler - Berechnung der Brotmenge mit römischen Zahlen bei fixem Brotpreis aber variablen Mehlpreis (Haus- & Hof Mathematiker)
- Bestimmung von π - Monte Carlo $\leftrightarrow$ jeder grafische Taschenrechner, Student

Analytisch vs. Numerisch:

Analytisch: Mathematische Formulierung eines Problems und umstellen nach der unbekannten Variable. Alle Werte können exakt berechnet werden.

Numerisch: Mathematische Formulierung eines Problems, es gelingt aber kein Lösen der Gleichung nach der Unbekannten. Numerische (oder graphische) Methoden werden als Hilfstool genutzt um sich der Lösung anzunähern.

Neues Alphabet? Griechische Buchstaben:

$A\,\alpha$	$B\,\beta$	$\Gamma\,\gamma$	$\Delta\,\delta$	$E\,\epsilon, \varepsilon$	$Z\,\zeta$, Zeta
$H\,\eta$, Eta	$\Theta\,\theta, \vartheta$	$I\,\iota$, Iota	$K\,\kappa$	$\Lambda\,\lambda$	$M\,\mu$, Mu
$N\,\nu$, Nu	$\Xi\,\xi$	$O\,o$, Omikron	$\Pi\,\pi$	$P\,\rho, \varrho$	$\Sigma\,\sigma$
$T\,\tau$	$\Upsilon\,\upsilon$, Upsilon	$\Phi\,\phi$	$X\,\chi$	$\Psi\,\psi$	$\Omega\,\omega$

$\rightarrow$ `https://www.wikihow.com/Write-the-Greek-Alphabet`

1.2 Grundgerüst der (theoretischen) Physik

- Superpositionsprinzip, Vektorzerlegung
- Mechanik:
  - Newton'sche Axiome:
    1. Trägheitsgesetz
    2. Aktionsgesetz $F = ma$
    3. actio = reactio
  - Erhaltungssätze:
    - Energie $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ =const.

    * Impuls $\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow$ Impulserhaltung $\dot{p} = p'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$
    * Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
  - Schwerpunktsatz (Masse vereinigt sich in einem Punkt, Kräfte greifen dort an $\rightarrow$ Schwerpunktssystem/ Laborsystem)

- Thermodynamik: 3 Hauptsätze
  1. Innere Energie eines Systems: $\Delta U = Q + W$
  2. "Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niederer auf einen Körper höherer Temperatur ist." (Clausius) $\leftrightarrow \Delta S = \frac{Q}{T}$
  3. Absolute Nullpunkt ist nicht erreichbar. (Nernst-Theorem)
- Elektrodynamik: Maxwellgleichungen
- Optik: Fermatsches Prinzip (Prinzip der extremalen Laufzeit, Prinzip des extremalen optischen Weges)
- Moderne Physik: Schrödingergleichung

1.3 Analysis und Physik?

1.3.1 Gleichungen, Unbekannte und (lineare) Gleichungssystem

Gleichungen und Unbekannte:

- Mathematische Formulierung von Modellen um Vorhersagen bestimmen zu können
- Nullstellenbestimmung: Wie weit fliegt Kirschkern?
- Schnittpunkte $\rightarrow$ Nullstellen

(Lineare) Gleichungssysteme:

- Bestimmung von unbekannten Parametern einer Gleichung aus Datenpunkten von Messungen
- Interpolation & Extrapolation von Daten
- Bestimmung von Lösungen mehrdimensionaler (Differential-) Gleichungen bei gegebenen Anfangs- oder Randwerten

1.3.2 Elementare Funktionen

$\rightarrow$ Gleichungen mit einem bestimmten funktionalen Zusammenhang, für die die Mathematik schon ganz viel weiß!

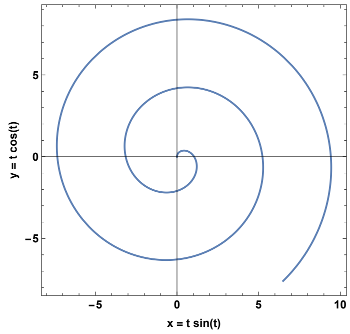
Hinweis: Am Besten mit Bildern vervollständigen.

- Potenzfunktionen / Wurzelfunktionen:
  - geradlinig gleichförmige Geschwindigkeit $v(t)$
  - geradlinig gleichmäßig Beschleunigung $a(t)$
  - lineare Temperaturzusammenhänge
- Exponentialfunktionen / Logarithmusfunktionen:

- Wachstums- und Zerfallsgesetze (wenn Zu-/Abnahme direkt proportional von aktueller Anzahl abhängt)
  Populationsdynamik konst. Raten: $N(t) = N_0 e^{ct}$ (N, N_0 Individuenanz., $c = c_1 - c_2$ Wachstums-/Sterberate)
  Absorptionsgesetz: $R(d) = R_0 e^{-\mu d}$ (R, R_0 Zählrate, μ Absorbtionskoeff.)
- Barometrische Höhenformel $p(h) = p(h_0)e^{-\Delta h/h_s}$ mit $h_s = \frac{RT}{Mg}$
  (M molare Masse, R univers. Gaskonstante, T abs. Temp., g Erdbeschleunigung)
- Logarithmische Spiral

  $$r(\varphi) = a\, e^{k\varphi}$$
  $$\varphi(r) = 1/k \ln(r/a)$$
  $$x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi)$$
  $$y(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi)$$

  (Schneckenhaus, Sonnenblume)



- Skaleneinteilungen: ph-Wert, Richterskala, Sternenhelligkeiten

• Winkelfunktionen:
  - Elektromagn. Wellen (Licht, X-Ray, Infrarot, Schall), Gravitationswellen
  - Wasserwellen, Erdbeben, Gravitationswellen
  - Geometrische Zusammenhänge für Vektoren (Kräfte,...) und in Dreiecken
• Zusammenhang zw. Komplexen Zahlen und Exponentialfunktion:
  $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi), e^{-i\phi} = \cos(\phi) - i\sin(\phi)$

1.3.3 Differential- und Integralrechnung

Differentialrechnung:

• Geometrische Bedeutung: Anstieg der Funktion an $f(x)$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(Differenzquotienten)}$$

  (Erklärung am Bild) → Extremwert-/ Optimierungsprobleme:
  - Minimum: $f'(x) = 0, f''(x) > 0$
  - Maximum: $f'(x) = 0, f''(x) < 0$
  - Sattelpunkt: $f'(x) = f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$ (horizontale Wendetangente)
  - sind weitere Ableitungen immer noch 0: bis $f^{(n)} \neq 0$ ableiten, bei n gerade – Sattelpunkt, bei n ungerade – Extrempunkt.
• Physikalische Bedeutung: Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen bei zeitlicher Änderung (Zeitableitung)
• **Zusatz:** Erweiterung auf Funktionen mit mehreren Variablen $f(x_1, x_2, \dots)$

$\to$ partielle Ableitung

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots) - f(x_1, x_2, \dots)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad \text{(Satz von Schwarz)}$$

Bisher: Bewegung starrer Körper (Punktmasse: m, x, v, a) siehe Abb. 1.1

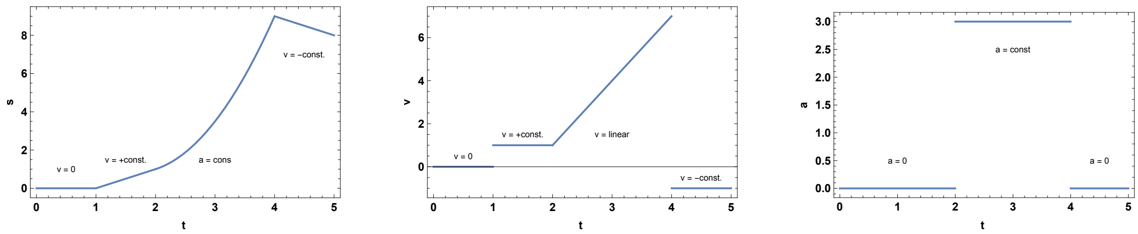


Abbildung 1.1: Weg-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm für eine gegebene Wegstrecke entsprechend "Schulwissen". Man sieht Sprünge in v und a die nicht realistisch sind.

- keine Bewegung: const. $s \to x$ (kartesische Koordinaten)
- geradlinig, gleichförmige Bewegung: const. v
  mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

  $$\to v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) = x'(t)$$

  Variable Geschwindigkeiten (!!!) darstell- und berechenbar (Δ diskrete, endl. Abstände/Intervalle)
- geradlinig, gleichmäßig beschleunigte Bewegung: const. a

  $$\to a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t) = v'(t)$$
  $$= \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}(t) = x''(t)$$

  Variable Beschleunigungen (!!!) darstell- und berechenbar

(Gilt analog auch für Raum-Ableitungen.)

Integralrechnung:

- Geometrische Bedeutung: (vorzeichenbehaftete) Fläche unter der Kurve

  $$F = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \qquad \text{(Riemannsumme)}$$

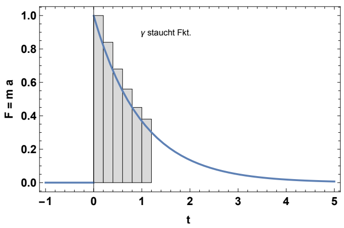
  (Veranschaulichen am Bild)
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Differential- und Integralrechnung sind zueinander 'inverse' Operationen.
  Übergang $F \to f : F' = f$, Übergang $f \to F : F(x) = \int^x f(x')\mathrm{d}x'$

- Physikalische Anwendung: Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen bei zeitlicher Änderung (Zeitintegration) und räumlicher Änderung (Arbeit durch Kraft pro Weg)

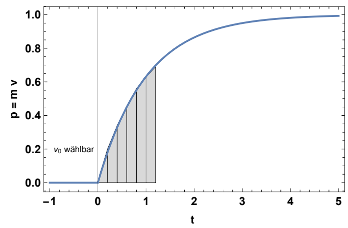
Bsp.: Schräger Wurf (Herleitung dann auch verallgemeinerbar auf Reibungskräfte, etc.)

Bsp.: Unter dem Einfluss einer externen Kraft $F = F_0\, e^{-\gamma t} (F_0, \gamma > 0)$ bewegt sich ein Teilchen längs der x-Achse.

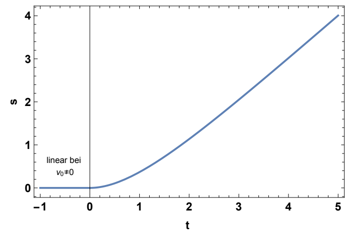
- Skizze und Diskussion



Kraft-Zeit-Diagramm: Kraft in kleine Kraftstöße ($p = F\,\Delta t$) für den Zeitraum Δt zerlegbar.



Geschwindigkeits-Zeit-Digramm: In seinem solchen Zeitintervall wächst $p = m\,v$ linear an.



Weg-Zeit-Diagramm (Analog b)

- **Studium:** Berechnung: $v(t), v(\infty), x(t) \to$ dann alles andere berechenbar

$$
\begin{aligned}
m\,\ddot{x} &= F(x, \dot{x}, t) \\
m\,\ddot{x} &= m\,\dot{v} = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = F_0\, e^{-\gamma t} && \text{(Trennung der Var.)} \\
\dot{v} &= \frac{F_0}{m}\, e^{-\gamma t} && \text{(Bestimmung Stammfunktion, Anf.-Bed. } v_0\text{)} \\
\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v' &= \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{-\gamma t'} \mathrm{d}t \\
v(t) &= v_0 + \frac{F_0}{m\,\gamma}\,(1 - e^{-\gamma t}) && v_{\text{end}} = v(\infty) = v_0 + \frac{F_0}{m\,\gamma} \\
\int_{x_0}^{x(t)} \mathrm{d}x' &= \int_0^t \left(v_0 + \frac{F_0}{m\,\gamma}\,(1 - e^{-\gamma t}) \right) \mathrm{d}t' && x(t) \text{ Stammfunktion von } v(t) \\
x(t) &= x_0 + t \left(\frac{F_0}{m\,\gamma} + v_0 \right) + \frac{F_0}{m\,\gamma^2}\, e^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

- **Studium:** Welche Arbeit leistet die Kraft?

$$
\begin{aligned}
W &= \int F(x)\mathrm{d}x \overset{\text{Subst.}}{=} \int F(t) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t \\
W &= \Delta E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}(v_{\text{end}}^2 - v_0^2) = \frac{m}{2} \left[\left(v_0 + \frac{F_0}{m\,\gamma} \right)^2 - (v_0)^2 \right] = \frac{m}{2} \left(2 v_0 \frac{F_0}{m\,\gamma} + \frac{F_0^2}{m\,\gamma^2} \right) \\
&= \frac{F_0}{m\,\gamma} \left(m\,v_0 + \frac{F_0}{2\,\gamma} \right)
\end{aligned}
$$

Weitere Bsp.:

- Uran-Zerfall: $U^{238} \to Th^{234} + \alpha + E_{\text{kin}}$, $E_{\text{kin}} = 4,2$ MeV, $\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$
- Populationsdynamik: $\dot{N} = a(1 - bN(t))N(t)$

- Bewegung von Oszillator/Masse mit Reibung: $F = m\,\ddot{x} = -cx - \beta|\dot{x}|^{\alpha}\text{sign}(\dot{x})$
- Serienschaltkreis: $U_R + U_C = U(t) \rightarrow RI + Q/C = U_0 \sin(\omega t) \rightarrow R\dot{Q} + Q/C = U_0 \sin(\omega t)$ (Wechselspannungsquelle $U(t)$ in Reihe mit Kondensator und Widerstand)

1.4 Vektoralgebra und Physik?

Wiederholung: Mathematik soll uns helfen die Realität zu beschreiben!

Winkel:

- Pythagoras (Bild hilft)
- Winkel-Seiten-Zusammenhänge: Additionstheoreme (siehe Übungsaufgaben)
- Beschreibung von Bewegungsrichtungen in 2- und 3D (Wurf, Drehungen/Rotationen, Reflexionen, Stoß, Beugung, Brechung) → Mechanik, Optik, Thermodynamik
- Beschreibung von Körpern: Kreis, Zylinder, Kegel, ...
- Beschreibung von Wellen

Vektoren: Beschreibung eines Weges: Gehe in *Richtung* für *Betrag* Meter/Zeit. (Bild)

- Richtung, Länge/Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ mit $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ – Kartesisches Koordinatensys.
- Vektoren: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z = \sum_i^3 a_i\,b_i$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \rightarrow$ bei normierte $\vec{a}, \vec{b}$ entspricht $\cos\alpha$ der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$: $\perp \rightarrow$ Weise nach, dass das kartesische Koord. ein orthogonales Koordinatensystem ist.
- Vektorprodukt/ Kreuzprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \perp \vec{c}$ (!!!)
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (!!!)
  - $|\vec{a} \times \vec{b}|$: Fläche des aufgespannten Parallelogramms

Bsp.: Schräger Wurf (handschriftlicher Zettel)

- Kombination zu Bahnkurve $y(x)$ aus $x(t), y(t)$ via $v_x = |v| \cos\phi, v_y = |v| \sin\phi$
- Winkel ϕ zw. x- und y-Achse
- Enthält automatisch den waagerechten und senkrechten Wurf

Anwendung in der Physik

Normalen-Vektor $\vec{a} \rightarrow \vec{n}$
Variabler Vektor $\vec{b} \rightarrow \vec{r}$ (analog zu x)

Beschreibung von räumlich ausgedehnten Größen (Feldern) mit skalarem & vektoriellem Charakter.

- **Skalare Felder:** Jedem Punkt $\vec{r}$ wird ein skalarer Wert zugeordnet. Flächen konst. Werte heißen Niveauflächen. (Bsp. Potential, Temperatur, Massendichte)
- **Vektorielle Felder:** Jedem Punkt $\vec{r}$ wird ein Vektor zugeordnet. Die Feldlinien sind Linien, an denen das Vektorfeld tangential anliegt. (Bsp.: Kraft, Geschwindigkeit, Magnetfeld)
- **Vektoranalysis:** Anwenden der Analysis auf Vektoren zur Berechnung der Eigenschaften von Feldern