Brückenkurs – Theoretische Physik

Dr. Janett Prehl

janett.prehl@physik.tu-chemnitz.de
Raum C60.212, Telefon 0371-531-35612

Übungsaufgaben

Analysis in der Anwendung

Extremwertaufgaben

1/1 Die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (0, f(x))$, $C = (x, 0)$ und $D = (x, f(x))$ bilden ein Rechteck. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie für welche Werte von $x \geq 0$ der Flächeninhalt extremal wird. Um was für ein Extremum handelt es sich?

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2+3}{x}$

c) $f(x) = (x+1)e^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}$

1/2 Eine EU-Norm für Dosen (idealer Zylinder) soll erarbeitet werden:
Bei der Produktion soll natürlich möglichst wenig Material verbraucht werden. Welche Maße muss die EU-Norm vorschreiben?
Überlappungen zur Herstellung sollen nicht berücksichtigt werden.

1/3 Beim Transport ist eine rechteckige Glasscheibe beschädigt worden. Zufälligerweise ist die Ecke gerade abgebrochen. Der Glaser möchte deshalb den Rest noch weiter verwerten. Er überlegt, welches rechteckige Stück er jetzt noch gebrauchen kann. Die Originalscheibe war 110 cm lang und 80 cm breit. Von der Längsseite sind 20 cm und von der Breitseite 30 cm abgebrochen.
Welches zugeschnittene Stück hat den größten Flächeninhalt?

1/4 Ein Ohmscher Widerstand der Größe $300\,\Omega$ soll so in zwei Teilwiderstände R_1 und R_2 aufgeteilt werden, dass der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung der beiden Teilwiderstände maximal wird. Für den Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 gilt $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Bestimmen Sie den Widerstand der beiden Teilwiderstände so, dass der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung der beiden Teilwiderstände maximal wird, und geben Sie den maximalen Gesamtwiderstand an.

1/5 Ein oben offenes Gefäß bestehe aus dem Mantel eines Zylinders (Höhe: h, Radius: r) mit nach unten angesetzter Halbkugel (Radius: r). Die gesamte Außenfläche des Gefäßes habe den Flächeninhalt 400cm^2.
Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h so, dass das Volumen V des Körpers maximal wird, und geben Sie das maximale Volumen an.

Mechanik

2/1 Die Tiefe eines ausgetrockneten Brunnens ist zu bestimmen. Man wirft dazu einen Stein hinein, nach 3 s hört man den Aufprall des Steines.

a) Wie tief ist der Brunnen, wenn die Luftreibung vernachlässigt wird.

b) Wie verändert sich die Tiefe, wenn man von einer Schallausbreitung von $v_s = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ausgeht?

und geben Sie die maximale Weite an.

2/2 Ein Motorrad (ink. Motorradfahrer) mit der Masse $m = 240$ kg fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 72$ km/h auf einer Landstraße. Weil plötzlich ein Traktor auf die Landstraße einbiegt muss er Notbremsen und schafft es bei einer konstanten Bremsverzögerung das Motorrad auf einem Weg von 30 m zum Stehen zu bringen. Welche Bremsarbeit verrichtet das Motorrad?

2/3 Ein mit einer Flüssigkeit vollständig gefülltes Gefäß der Höhe h ($h = 1\,\mathrm{m}$) mit vertikaler Wand steht auf einer horizontalen Ebene. Aus einer Öffnung in der Gefäßwand, die in der Tiefe x unterhalb des Flüssigkeitsspiegels liegt, dringt ein Flüssigkeitsstrahl. Nach dem Gesetz von Torricelli verlässt die Flüssigkeit das Gefäß mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$ ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$). Bestimmen Sie die Tiefe x so, dass der Flüssigkeitsstrahl die maximale Weite s erzielt, und geben Sie die maximale Weite an.

Zusatz – Thermodynamik (Differentialgleichung)

Eine Flasche Bier wird mit $T_1 = 7°\mathrm{C}$ aus einem Kühlschrank genommen und 90 min bei $T_0 = 19°\mathrm{C}$ stehen gelassen. Anschließend besitzt es eine Temperatur von $T_2 = 15°\mathrm{C}$. Wie lange muss das Bier wieder in den 7°C-Kühlschrank, damit man es mit annehmbaren $T_3 = 8°\mathrm{C}$ trinken kann? Es gelte das Newtonsche Abkühlungsgesetz:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\,(T - T_\mathrm{U}) \qquad (k\text{...Proportionalitätsfaktor}, T_\mathrm{U}\text{...Umgebungstemp.})$$

Lineare Algebra

Winkelfunktionen

3/1 Zeichnen Sie einen Einheitskreis. Zeichnen Sie für zwei beliebige Winkel α die geometrische Bedeutung der folgenden Ausdrücke ein.

a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) $\tan\alpha$ d) $\cot\alpha$

3/2 Verwenden Sie die Beziehungen (1)-(4) um die übrigen Additionstheoreme abzuleiten.

(1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (2) $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$

(3) $\cos 90° = 0$; $\sin 90° = 1$ (4) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

a) $\sin(\alpha \pm 90°) = \pm\cos\alpha$

b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

d) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

e) $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Vektoren

4/1 Überprüfen sie, ob die folgenden Koordinatensystem orthogonale Basisvektoren haben.

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

4/2 Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a}$ für den gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{26}, \quad \vec{a}\perp \begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}\perp \begin{pmatrix}6\\-9\\5\end{pmatrix}$$

4/3 **Zusatz:** Berechnen Sie folgenden Ausdrücke mit $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = const.$ und $\vec{r} = (x, y, z)$.

a) $a\,\vec{r}$ b) $\vec{a}\cdot\vec{r}$

c) $\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})$ d) $|\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})\,|$

e) $(\vec{a}\times\vec{r})$ f) $|\vec{a}\times\vec{r}\,|$

g) $[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{r})]$ h) $\frac{a}{|\vec{r}|}$

Zusatz: Überlegen Sie sich, wie die graphische Repräsentation der jeweiligen Aufgabe und ihrer Lösung aussieht.

Lösungen

1/1 **Ansatz:** $A(x) = x\,f(x), A'(x_E) = 0, A''(x_E) \rightarrow$ Art des Extremums
 a) $x_E = 1, A(x_E) = 0.5$ – Maximum
 b) $x_E = 1, A(x_E) = 3$ – Minumum
 c) $x_E = (1+\sqrt{5})/2, A(x_E) \approx 0.84$ – Maximum
 d) $x_E = 1, A(x=1) = 2$ – Minimum

1/2 **Ansatz:** $A_O(r,h) = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2, V(r,h) = \pi\,h\,r^2 = \text{const.}$
$\rightarrow A_O(r) = \frac{V}{r} + 2\,\pi\,r^2, A'_O(r) = 0$
$\rightarrow r = 2\,h$

1/3 **Ansatz:**
$$h(l) = 215 - 3/2\,l, A_G(l) = \begin{cases} 80\,l & l < 90 \\ l \cdot h(l) & 90 \leq l \leq 110 \\ 0 & l > 110 \end{cases}$$
$\rightarrow A'_G = 0 \rightarrow 90 \times 80$ (Lösung $l = 71.\bar{6}$ liegt außerhalb Def.-Bereich von $h(l)$.)

1/4 **Ansatz:** $R_G = R_1 + R_2, R(R_1) = \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2} = R_1(1+\frac{R_1}{R_G}), R'(R_1) = 0, R''(R_1) < 0$
$\rightarrow R_1 = R_G/2 = 150\,\Omega = R_2, R(R_1) = 75\,\Omega$

1/5 **Ansatz:** $V(r,h) = \pi\,r^2\,h + 2/3\,\pi\,r^3, A(r,h) = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2 \rightarrow V(r) = A\,r/2 - \pi\,r^3/3$
$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} = \frac{20}{\sqrt{2\pi}} \approx 7.9788, h = 0, V = \sqrt{\frac{A^3}{18\pi}} \approx 1063.9 \text{ cm}$$

2/1 **Ansatz:**
 a) $h = g/2\,t^2 \approx 44.15m$
 b) $h = \frac{g}{2}t_1^2, h = \frac{v_s}{t_2}, t_g = t_1 + t_2$
$$\rightarrow h_{1,2} = v_s\,t_g + \frac{v_s^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2}{g}\,t_g\,v_s^3 + \frac{v_s^4}{g^2}} \approx \{40.7 \text{ m}, 25567.1 \text{ m}\}$$

2/2 $W_B = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = 48000$ Nm

2/3 **Ansatz:** Fallzeit: $h - x = g/2\,t^2$, Weite + Energieerhaltung: $s = v\,t, m/2\,v^2 = m\,g\,x$
$\rightarrow s(x) = 2\sqrt{h-x}\sqrt{x},\ s'(x) = 0, s''(x) < 0,\ x_E = h/2,\ s(x_E) = h$

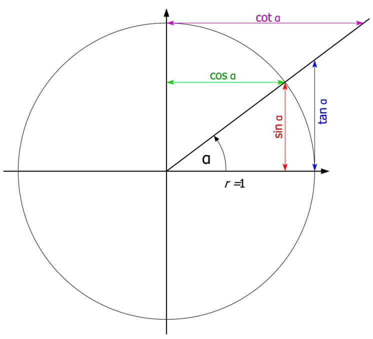
Zusatz – Thermodynamik

$$-\int_{t_A}^{t_B} k\mathrm{d}t = \int_{T_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}T}{T - T_U} \quad \Rightarrow \quad -k(t_B - t_A) = \ln\left(\frac{T_B - T_u}{T_A - T_U}\right)$$

1) $$-k\,90 \text{ min} = \ln\left(\frac{7°\text{C} - 19°\text{C}}{15°\text{C} - 19°\text{C}}\right) \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 3}{90 \text{ min}} \approx 0.01221\frac{1}{\text{min}}$$

2) $$-\frac{\ln 3}{90 \text{ min}}(\Delta t) = \ln\left(\frac{8°\text{C} - 7°\text{C}}{15°\text{C} - 7°\text{C}}\right) \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\ln 8}{\ln 3}\,90 \text{ min} \approx 170.35 \text{ min} \approx 2 \text{ h}50 \text{ min}$$

3/1 Darstellung:



3/2 **Ansatz:**

a) Verwende (4) und setze (3) ein.

b) Verwende (4) und setze die Lösung von a) und die Relationen $\cos \pm\beta = \cos\beta, \sin(\pm\beta) = \pm\sin\beta$ ein.

c) Leite die Gleichung von rechts beginnend her. Bestimme zunächst den Nenner mittels $\tan\alpha \pm \tan\beta$ und (2) ($\rightarrow \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$) und den Zähler mittels $1 \mp \tan\alpha\tan\beta$ und (2) ($\rightarrow \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$). Fasse dann zusammen.

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\,\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan(\alpha\pm\beta)$$

d) Reformuliere $2\,\alpha = \alpha + \alpha$ und wenden dann (4) an.

e) Wende zunächst (1) und dann $\cos^2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ an.

4/1 **Ansatz:**
Orthogonalität gilt, wenn $\vec{a}_i\,\vec{a}_j = \begin{cases} c \neq 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ für alle i, j.

a) $\vec{a}_1\,\vec{a}_2 = \vec{a}_1\,\vec{a}_3 = \vec{a}_2\,\vec{a}_3 = 0 \rightarrow$ orthogonal

b) $\vec{b}_1\,\vec{b}_2 = -4, \vec{b}_1\,\vec{b}_3 = 4, \vec{b}_2\,\vec{b}_3 = 0 \rightarrow$ nicht orthogonal

c) $\vec{c}_1\,\vec{c}_2 = \vec{c}_1\,\vec{c}_3 = \vec{c}_2\,\vec{c}_3 = 0 \rightarrow$ orthogonal

4/2 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 26, 5a_x + a_y + 7a_z = 0, 6a_x - 9a_y + 5a_z = 0$

$$\rightarrow \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4/3 Ausdrücke (graphische Repräsentation)

a) $\begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$ (Vektor, konzentr. Kugeln, lin. Fkt.)

b) $a_x x + a_y y + a_z z$ (skalar, planare Ebenen $\perp \vec{a}$, lin. Fkt.)

c) $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} (a_x x + a_y y + a_z z)$ (Vektor, planare Ebenen $\perp \vec{a}$, Vektoren $\parallel \vec{a}$, spiegelsym. $\vec{a}$

d) $(a_x x + a_y y + a_z z)\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (skalar, planare Ebene $\perp \vec{a}$, Wurzelfkt.)

e) $\begin{pmatrix} a_y z - a_z y \\ a_z x - a_x z \\ a_x y - a_y x \end{pmatrix}$ (Vektor, zylindrisch um $\vec{a}$, Vektoren tang.)

f) $\sqrt{(a_y z - a_z y)^2 + (a_z x - a_x z)^2 + (a_x y - a_y x)^2}$ (skalar, zylindrisch um $\vec{a}$)

g) $\begin{pmatrix} -a_y^2 x - a_z^2 x + a_x a_y y + a_x a_z z \\ a_x a_y x - a_x^2 y - a_z^2 y + a_y a_z z \\ a_x a_z x + a_y a_z y - a_x^2 z - a_y^2 z \end{pmatrix}$ (Vektor, zylindrisch um $\vec{a}$, Vektoren $\perp$)

h) $\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (skalar, konzentr. Kugeln, $1/|x|$-Fkt.-Verlauf)