UE Wahrscheinlichkeitsrechnung, WS 10/11

Beispielsammlung

(Letztes Update: 8. Oktober 2010)

1 Wiederholung: Differential- und Integralrechnung

1.1 Bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen folgender Funktionen **(1P)**

(a) $f_1(x) = \sin(2x)$

(b) $f_2(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)$

(c) $f_3(x) = \cos(x^3)$

1.2 Bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen folgender Funktionen **(1P)**

(a) $g_1(x) = \sin(2x)\cos(\ln(x))$

(b) $g_2(x) = \cos^n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$

1.3 Berechnen Sie **(1P)**

$$\int_0^1 \sin(x)\cos(x)dx$$

1.4 Berechnen Sie **(1P)**

(a) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx$

(b) $\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$

(c) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^2 dx$

wobei $\lambda > 0$.

1.5 Berechnen Sie **(1P)**

(a) $\int_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} x dx$

(b) $\int_{\theta_1-\theta_2}^{\theta_1+\theta_2} x^2 dx$

wobei $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$

1.6 Berechnen Sie **(2P)**

$$\int_B xyd(x,y)$$

wobei $B = [0,1] \times [0,3] = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3\}$.

1.7 Berechnen Sie

$$\int_B xyd(x,y)$$

wobei $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$.

1.8 Berechnen Sie **(2P)**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_B f(x,y)d(x,y)$$

wobei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{64}, & \text{für } 0 \le x \le 4,\ -x \le y \le 2x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $B = \{(x,y) : 0 \le x \le 4,\ -x \le y \le 2x\}$.

1.9 Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx$

(a) indem Sie das Integral zunächst durch Anwenden der Substitutionsregel auf die Form

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)^2 dy$$

bringen

(b) und diesen Ausdruck dann unter Anwendung der Formel $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ (Lehrsatz von Pythagoras) und partieller Integration auflösen.

2 Wahrscheinlichkeiten und Ereignisse

2.1 Beschreiben Sie den Ereignisraum des Zufallsexperiments "*Würfeln mit 2 (ununterscheidbaren) 6 seitigen Würfeln*" mathematisch (als Menge). **(1P)**

2.2 Welche Teilmengen des Ereignisraumes aus Beispiel 2.1 entsprechenden den folgenden Ereignissen **(1P)**

(a) Die Summe der Augenzahlen ist größer 4.
(b) Die Summe der Augenzahlen ist größer oder gleich 4.
(c) Die Summe der Augenzahlen ist größer 12.
(d) Zumindest einer der Würfel zeigt eine Augenzahl größer als 5.
(e) Keiner der Würfel zeigt eine Augenzahl größer als 3.

2.3 Bilden Sie die Mengen, die den Komplementärereignissen der Ereignisse aus Aufgabe 2.2 entsprechen. **(1P)**

2.4 Man bezeichne, die in Aufgabe 2.2(a) gefundene Menge, mit A, die in 2.2(b) gefunde Menge mit B usw. Bilden Sie folgende Mengen und beschreiben Sie die Ereignisse, die diesen Mengen entsprechen, in Worten. **(1P)**

(a) $A \cap B$
(b) $D \cup E$
(c) $D \cap E$
(d) $C \cup A$
(e) $C \cap A$

2.5 Zeigen Sie mittels Venn-Diagrammen oder formaler Rechnung, dass **(1P)**

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Tipp: $A \cup B = \{x : x \in A$ oder $x \in B\}$ und $A \cap B = \{x : x \in A$ und $x \in B\}$

2.6 Zeigen Sie die Gesetze von DeMorgan mittels Venn-Diagrammen oder formaler Rechnung **(1P)**

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.7 Zeigen Sie, dass **(1P)**

(a) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
(b) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

2.8 Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aus Aufgabe 2.2. **(1P)**

2.9 Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ **(1P)**

2.10 Gegeben seien drei Teilmengen A, B und C eines Wahrscheinlichkeitsraumes Ω. Es ist bekannt, dass $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.1$, $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.2$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.05$ und $A \cup C = \Omega$.

(a) Gilt $B \subseteq C$? Gilt $B \subsetneq C$? **(1P)**

(b) $\mathbb{P}(B \cap A) =?$

(c) $\mathbb{P}(C) =?$ (b+c)=**(1P)**

2.11 Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{4}$. Können die beiden Ereignisse disjunkt sein? Warum (nicht)? **(1P)**

2.12 Seien A und B unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(B \cup A) = 0.6$. Wie hoch it $\mathbb{P}(B)$? **(1P)**

2.13 Seien A und B zwei Ereignisse. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

(a) Wenn $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$, dann gilt $\mathbb{P}(A \cap B) \leq p^2$.

(b) Wenn $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B^c)$, dann gilt $A^c = B$.

(c) Wenn $\mathbb{P}(A) = 0$, dann gilt $A = \emptyset$.

(d) Wenn $\mathbb{P}(A) = 0$, dann gilt $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

2.14 Seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 3/4$ und $\mathbb{P}(B) = 5/8$. Zeigen Sie, dass **(2P)**

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 3/4$

(b) $3/8 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 5/8$

(c) $1/8 \leq \mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 3/8$

2.15 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit 2 (unterscheidbaren) Würfeln, die Augensumme 10 zu erreichen? **(1P)**

2.16 Seien A und B zwei unabhängige Ereignisse. **(1P)**

(a) Zeigen Sie dass, A^c und B auch unabhängig sind.

(b) $\mathbb{P}(A) = 0,5 = \mathbb{P}(B)$. Wie hoch ist $\mathbb{P}\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right)$?

2.17 Seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0,5$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$. Wie hoch ist $\mathbb{P}(B)$, wenn **(1P)**

(a) A und B unabhängig sind.

(b) A und B disjunkt sind.

(c) $\mathbb{P}(A|B) = 0.3$

(d) $\mathbb{P}(A|B) = 0.5$

2.18 Angenommen Person A sagt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.75 die Wahrheit und Person B mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B auf eine gegebene Fragen verschieden antworten. **(1P)**

2.19 Die Wahrscheinlichkeit dass Person A einen bestimmten Test besteht, ist $\frac{3}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit dass Person B besteht, ist $\frac{2}{5}$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest eine(r) der beiden besteht?

2.20 Die Wahrscheinlichkeit dass A eine bestimmte Aufgabe nicht lösen kann, ist $\frac{8}{14}$ und die Wahrscheinlichkeit dass B die Aufgabe lösen kann ist $\frac{14}{24}$. Wie hoch ist Wahrscheinlichkeit dass die Aufgabe gelöst wird, wenn A und B es versuchen? **(1P)**

2.21 Spieler A und Spieler B spielen folgendes Spiel; sie werfen abwechselnd eine Münze und der Spieler der als erster 'Kopf' wirft hat gewonnen. Spieler A hat den ersten Wurf. Zeigen Sie, dass Spieler A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnt. **(2P)**
Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \frac{2}{3}$$

2.22 (Huygen's Problem) A und B spielen ein Spiel mit zwei Würfeln. A gewinnt, wenn sie sechs würfelt bevor B sieben würfelt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt wenn sie den ersten Wurf hat $\frac{30}{61}$ beträgt.

3 Kombinatorik

3.1 Wieviele verschiedene Blätter kann man als Spieler beim Vierer-Schnapsen bekommen (20 Karten, jeder Spieler bekommt 5)? **(1P)**

3.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 5 Personen zwei am gleichen Wochentag geboren? **(1P)**

3.3 Ein Fragebogen enthält 5 Fragen, zu denen jeweils 4 Antworten vorgegeben sind. Einen positiven Prüfungsabschluss erreicht man, wenn mindestens die Hälfte der Antworten richtig angekreuzt ist. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, einen positiven Prüfungsabschluss zu erlangen, wenn man einfach "blindlings" ankreuzt. **(1P)**

3.4 Zwei Spieler spielen folgendes Spiel: Es wird mit 4 Würfeln gewürfelt. Tritt mindestens einmal 6 auf, dann gewinnt A sonst B. Ist das Spiel fair in dem Sinne, dass im Mittel beide Spieler gleich oft gewinnen? **(1P)**

3.5 Eine Schachtel enthält n Kugeln, durchnummeriert mit 1,2, ..., n. Wir ziehen mit Zurücklegen aus der Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir erstmals beim k-ten Zug eine Kugel ziehen, die wir vorher schon einmal gezogen hatten? **(1P)**

3.6 In einer Ebene sind 15 Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. **(1P)**

(a) Wie viele Schnittpunkte von Geraden gibt es?

(b) Wie viele Dreiecke gibt es?

3.7 Auf wie viele Arten kann man 9 Tafeln Schokolade an 3 Kinder verteilen, wenn

(a) jedes Kind mindestens eine Tafel bekommen soll,

(b) jedes Kind mindestens zwei Tafeln bekommen soll, und

(c) nicht jedes Kind eine Tafel bekommen muss?

3.8 Bei einer Tanzparty nehmen 20 Frauen und 15 Männer teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es 15 Paare von einem Mann und einer Frau zu bilden?

3.9 Eine Telefonnummer lautet 518-42-18, wie viele (7 stellige) Telefonnummern können aus diesen Ziffern gebildet werden. **(1P)**

3.10 Vier Personen haben alle im Juni (30 Tage) Geburtstag. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

4.1 Gegeben sei eine Fabrik mit zwei Maschinen die Tennisbälle produzieren. Die Maschine A produziert 200 Bälle am Tag mit einer Fehlerquote von 2%, während die Maschine B 800 Bälle am Tag produziert und das mit einer Fehlerquote von lediglich 1%. Ein zufällig ausgewählter Tennisball ist fehlerhaft. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von Maschine B produziert wurde? **(1P)**

4.2 Gegeben seien drei Ereignisse A_i, $i = 1, 2, 3$ und die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{10}$ und $\mathbb{P}(A_3|A_1^c \cup A_2^c) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2|A_3)$. **(1P)**

4.3 Sie würfeln mit drei sechsseitigen Würfeln. Gegeben, dass keine zwei Würfel die selbe Augenzahl zeigen, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Augensumme sieben ist

(b) einer der Würfel die Augenzahl 3 zeigt

4.4 Angenommen fünf Prozent der Bevölkerung haben hohen Blutdruck. Von diesen fünf Prozent trinken 75% regelmäßig Alkohol. Weiters sei bekannt, dass 50% aller Menschen, die keinen hohen Blutdruck haben, regelmäßig Alkohol trinken. Wie viele Prozent der 'regelmäßigen Trinker' haben hohen Blutdruck? **(1P)**

4.5 Urne A enthält zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Urne B enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Eine Kugel wird von Urne A nach Urne B transferiert. Danach wird eine Kugel aus Urne B gezogen. **(1P)**

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel weiß ist?

(b) Gegeben die gezogene Kugel ist weiß. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die transferierte Kugel auch weiß ist?

4.6 Gegeben sei eine Multiple-Choice Frage mit vier möglichen Antworten. Ein Student kennt die Antwort der Frage mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Angenommen die Frage wurde richtig beantwortet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Antwort auf die Frage tatsächlich kennt? **(1P)**

4.7 In einer Quizshow muss sich eine Kandidatin zwischen 3 Toren entscheiden von denen in zweien kein Gewinn und in einem der Hauptpreis ist. Hat die Kandidatin ein Tor gewählt, so öffnet der Showmaster eines der verbleibenden (nicht gewählten Tore) ohne Gewinn und gibt der Kandidatin die Möglichkeit ihre Entscheidung noch einmal zu überdenken. Sollte die Kandidatin bei ihrer ursprünglichen Wahl bleiben, oder sich umentscheiden? **(2P)**

4.8 In einer Kiste sind zwei ununterscheidbare Urnen. Einer der Urnen enthält 4 weiße und 3 rote Kugeln und die zweite 3 weiße und 7 rote. Einer dieser Urnen wird zufällig gewählt und eine Kugel wird aus diese Urne gezogen. **(1P)**

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel weiß ist?

(b) Gegeben die gezogene Kugel ist weiß. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus der ersten Urne stammt?

4.9 Eine Urne enthält 3 rote und 7 blaue Kugeln, eine andere Urne dagegen 6 rote und 4 blaue. Bei einem Experiment wird zunächst zufällig eine der beiden Urnen gewählt, und dann aus dieser eine Kugel entnommen.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die entnommene Kugel rot ist.

(b) Gegeben, dass die entnommene Kugel rot ist, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde.

4.10 In einem T-förmingen Labyrinth hat ein Versuchstier die Wahl, nach Links zu gehen und Futter zu bekommen, oder nach Rechts zu gehen und sich einem leichten elektrischen Schlag auszusetzen. Beim ersten Versuch geht das Tier mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach Links wie nach Rechts. Hat es beim ersten Versuch Futter bekommen, so geht es beim nächsten Versuch mit Wahrscheinlichkeit 0.6 nach Links. Hat es dagegen beim ersten Versuch einen elektrischen Schlag bekommen, so geht es beim nächsten Versuch mit Wahrscheinlichkeit 0.8 nach Links. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Tier beim zweiten Versuch nach Rechts geht? **(1P)**

4.11 Über ein Virus sei bekannt, dass 15 Promille der Bevölkerung infiziert sind. Von einem Test auf dieses Virus sei bekannt, dass eine Virusinfektion bei einem Test mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit erkannt wird, und dass der Test bei einer nicht-infizierten Person mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit negativ ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der dieser Test eine Virusinfektion anzeigt, tatsächlich infiziert ist. **(1P)**

4.12 Sie haben drei Münzen, zwei davon sind normale Münzen und eine Münze hat zwei *Kopf-Seiten*. Sie wählen zufällig eine der Münzen und werfen *Kopf*. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eine normale Münze gezogen zu haben. **(1P)**

5 Diskrete Verteilungen

5.1 Gegeben Sei eine diskrete Verteilung auf den Punkten 1,2,3 und 4. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Punkte sind $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.15$ und $p_4 =?$. **(1P)**

(a) Finden Sie p_4 und zeichnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

5.2 Betrachten Sie das Experiment: *Würfeln mit zwei sechsseitigen Würfeln.* Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilung der Zufallsvariable Y, die die absoluten Differenz der beiden Augenzahlen beschreibt. **(1P)**

5.3 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung in 5.2. **(1P)**

5.4 Betrachten Sie eine Zufallsvariable X, deren Verteilungsfunktion folgende Gestalt hat

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.1, & -2 \leq x < 1.1 \\ 0.3, & 1.1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$, von X.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(2 < X < 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 3 | X \geq 0)$. **(a)+(b)=(1P)**

(c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = X^2$?

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(X^3 - cos(\pi X))$ **(c)+(d)=(1P)**

5.5 Für eine binomial verteilte Zufallsvariable X, mit $\mathbb{E}(X) = 5$ und $Var(X) = 4$ finden Sie die Parameter n und p. **(1P)**

5.6 Es sei Ω ein Ereignisraum und $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $x_1, \ldots, x_n$ jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt, d.h. $P(X = x_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weiters sei $\text{Var}[X] = 0$. Zeigen Sie, dass dann $X \equiv c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gelten muss. **(2P)**

5.7 Angenommen die Zufallsvariable X hat eine Verteilung die durch $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = p$ und $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - 2p$ für ein $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Finden Sie p, so dass die Varianz von X maximal ist. **(1P)**

5.8 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit

$$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = -1),\ \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 1) \text{ und } \mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X = 0)$$

Finden Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion von X. **(1P)**

5.9 Betrachten Sie die Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(X) = 10$ und $\text{Var}(X)$=25. Geben Sie die positiven Zahlen a und b an, so dass die Zufallsvariable $Y = aX - b$ Erwartungswert 0 und Varianz 1 hat. **(1P)**

5.10 Ein Münze wird so oft geworfen bis sie 'Kopf' zeigt. Sei X die Anzahl der benötigten Würfe. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$. **Hinweis**: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $0 < x < 1$. **(1P)**

5.11 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable **(1P)**

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

5.12 Eine Urne enthält a weiße und b schwarze Kugeln. Es werden c Kugeln mit Zurücklegen aus der Urne gezogen. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. **(1P)**

5.13 Eine Kiste enthält 2^n Tickets, von denen $\binom{n}{i}$ die Nummer i tragen ($0 \leq i \leq n$). Es werden insgesamt m Tickets aus der Kiste gezogen (mit Zurücklegen). Betrachten Sie die Zufallsvariable $S = \sum_{i=1}^{m} x_i$, wobei x_i die Nummer des i-ten Tickets ist und zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(S) = \frac{nm}{2}$$

(2P)

Hinweis: Verwenden Sie die kombinatorische Identität

$$2^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$$

5.14 Berechnen Sie die Schiefe der Verteilung in 5.4. Ist die Verteilung rechts- oder linksschief? **(1P)**

5.15 Angenommen, 5 % aller Flaschen haben zu wenig Inhalt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 20 Flaschen **(1P)**

(a) höchstens eine

(b) mindestens eine zu wenig Inhalt hat?

5.16 Ein Experiment gelingt doppelt so oft wie es fehlschlägt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in den nächsten 6 Versuchen mindestens 4 Erfolge geben wird. **(1P)**

5.17 Ein Kontrollor weiß, dass jeder 10. Fahrgast ohne Fahrschein unterwegs ist. Er kontrolliert 20 Fahrgäste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **(1P)**

(a) keinen Schwarzfahrer

(b) einen Schwarzfahrer

(c) mindestens 2 Schwarzfahrer erwischt?

5.18 Jeder Flugzeugmotor fällt unabhängig von den anderen während eines Fluges mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ aus. Voraussetzung für einen 'erfolgreichen Flug' ist, dass mindestens die Hälfte der Motoren nicht versagt. Für welche Werte von p ist eine zweimotorige Maschine einer viermotorigen vorzuziehen? **(1P)**

5.19 A certain typing agency employs Al, Bob, and Cathy as typists. The average number of errors per page is 3 when typed by Al, 4.2 when typed by Bob, and 2.1 when typed by Cathy. If your 7-page article is equally likely to be typed by any of the three typists, estimate the probability that it will have no errors. Also estimate the probability it will have at most 3 errors. **(1P)**

5.20 Eine Elektrofirma liefert Sicherungen in Packungen zu 150 Stück aus, und kann aufgrund jahrelanger Geschäftserfahrung versprechen, dass jede einzelne Sicherung mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit in Ordnung ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mehr als drei Sicherungen defekt sind und vergleichen Sie den Wert mit dem Ergebnis, welchen Sie durch die Poisson-Approximation erhalten. **(1P)**

5.21 Ein Kunde der Elektrofirma aus Beispiel 5.20 zieht bei einer Qualitätskontrolle zufällig 10 Sicherungen aus einer Packung, in der sich 12 defekte Sicherungen befinden. **(1P)**

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 der entnommenen Sicherungen defekt sind?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der defekten entnommenen Sicherungen.

5.22 Ein Reiseunternehmen weiß aus Erfahrung, dass von 100 Personen, die eine Gesellschaftsreise gebucht haben, durchschnittliche vier Personen die Reise nicht antreten. Das Unternehmen verkauft daher für 60 verfügbare Plätze (a) 61, (b) 62, (c) 63 Karten. Berechnen Sie in allen diesen Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen, die die Reise tatsächlich antreten wollen, einen Platz bekommen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der entsprechenden Poisson-Approximation. **(1P)**

5.23 Sie spielen Lotto (6 aus 45) **(1P)**

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, k richtige Zahlen zu tippen ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

(b) Approximieren Sie die obigen Wahrscheinlichkeiten mittels der Poissonverteilung

5.24 Ein Würfel wird so oft geworfen bis er '6' zeigt. Es sei T die Anzahl der Würfe bis zur ersten '6'. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 mal bzw mehr als 5 mal geworfen wird. **(1P)**

5.25 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel in obigem Beispiel mehr als 6 mal geworfen wird, gegeben dass bei den ersten 3 Würfen keine '6' gewürfelt wird. Was fällt Ihnen auf? **(1P)**

5.26 Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einem Kartenspiel (52 Karten, jeder Spieler erhält zwölf) **(1P)**

(a) genau acht Karos bekommen

(b) genau 7 Karten einer beliebigen Farbe bekommen

6 Stetige Verteilungen

6.1 Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte **(1P)**

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x(1-x) & \text{falls } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von c.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X < 1/4$?

6.2 Gegeben sei die Funktion **(1P)**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x^2 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $F(x)$ eine Verteilungsfunktion ist; d.h. prüfen Sie nach, dass $F(x)$ jene Eigenschaften besitzt, die für Verteilungsfunktionen charakteristisch sind.

(b) Bestimmen Sie durch Differenzieren die Dichte von $F(x)$.

6.3 Finden Sie ein k, so dass die Funktion **(1P)**

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Dichte ist. Bestimmen Sie außerdem $\mathbb{P}(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2})$ bezüglich der gefundenen Dichte.

6.4 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable in 6.1. **(1P)**

6.5 Es seien f_0 und f_1 Dichten. Argumentieren Sie, dass $(1-\theta)f_0 + \theta f_1$ auch eine Dichte ist für $0 \leq \theta \leq 1$. **(1P)**

6.6 Betrachten Sie die Funktion **(1P)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Dichte ist.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ für eine Zufallsvariable X mit Dichte f.

6.7 Betrachten Sie die Funktion **(1P)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Dichte ist.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $Var(X)$ für eine Zufallsvariable X mit Dichte f.

6.8 Die Dichte von X ist durch **(1P)**

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie a, $b \in \mathbb{R}$ unter der Annahme, dass $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{5}$

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der in (a) gefundenen Dichte.

6.9 Es sei X eine nicht-negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und Dichte $f(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

ist. **(2P)**
Hinweis: Integrieren Sie $\int(1 - F(x))1dx$ partiell. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to\infty}(1 - F(x))x = \lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f(y)dyx \le \lim_{x\to\infty}\int_x^\infty f(y)ydy = 0.$$

Dies muss aber der Fall sein, wenn der Erwartungswert existiert.

6.10 Sei X die Lebensdauer von Glühbirnen (in Stunden). Die Dichte von X sei durch **(2P)**

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, & 2 < x < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

(a) Welcher Prozentsatz an Glühbirnen überlebt länger als 15 Minuten?
(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $Var(X)$.
(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(0.25 < X \le 2.2|X > 1)$.
(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = E(X))$.

6.11 Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable X mit Dichte f, für die $f(\xi - x) = f(\xi + x)$ ($\xi \in \mathbb{R}$) gilt (die also symmetrisch um ξ ist). Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = \xi$ (falls $\mathbb{E}(X)$ existiert).
Hinweis: Behandeln Sie zuerst den Fall $\xi = 0$, indem Sie den Erwartungswert als Integral darstellen den Integrationsbereich in $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ aufteilen, eine Variablentransformation durchführen und schließlich $f(-x) = f(x)$ benutzen. Zeigen Sie den allgemeinen Fall durch Translation der Dichte um ξ. **(2P)**

6.12 If U is uniform on [-1,1], find the density function of U^2. **(1P)**

6.13 Es sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und Dichte von Y für

(a) $Y = 2X + 5$
(b) $Y = \frac{1}{4}X - 1$ a+b = **(1P)**
(c) $Y = 3X^2$
(d) $Y = sinX$ c+d = **(1P)**

6.14 Überprüfen Sie die Eigenschaft der "Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung: Ist $X \sim Exp(\lambda)$ ($\lambda > 0$), so ist $P(X > z + x \,|\, X > z) = P(X > x)$ für $x > 0$. **(1P)**

6.15 Suppose that the time (in hours) required to repair a car is an exponentially distributed random variable with parameter $\lambda = 1/2$. What is the probability that the repair time exceeds 4 hours? If it exceeds 4 hours what is the probability that it exceeds 8 hours? **(1P)**

6.16 Finden Sie die ersten 3 (nicht zentrierten) Momente der Exponentialverteilung. Können Sie eine allgemeine Formel für das n-te Moment erraten (oder gar Beweisen)? **Tipp:** Berechnung durch partielle Integration, eventueller Beweis mittels vollständiger Induktion. **(2P)**

6.17 Gegeben sei eine Zufallsvariable $X \sim B(40, p)$. Approximieren Sie $F_X(x)$ bei $x = 10, 15, 25$ mit der Normalverteilung und mit der Poissonverteilung für $p = 0.3, 0.4, 0.5$. Die entsprechenden Werte von F_X sind

	$x = 10$	$x = 15$	$x = 25$
$p = 0.3$	0.3087	0.8849	1.0000
$p = 0.4$	0.0352	0.4402	0.9988
$p = 0.5$	0.0011	0.0769	0.9597

6.18 Birdie's Bearing Works manufactures bearing shafts whose diameters are normally distributed with parameters $\mu = 1$, $\sigma = 0.002$. The buyer's specifications require these diameters to be 1.000 ± 0.003 cm. What fraction of the manufacturer's shafts are likely to be rejected? If the manufacturer improves her quality control, she can reduce the value of σ. What value of σ will ensure that not more than 1 percent of her shafts are likely to be rejected? **(1P)**

6.19 Es sei $X \sim N(0, 1)$, und es sei $\Phi(t) = P(X \leq t)$ die dazugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass für $c \geq 0$ $P(|X| > c) \ = \ 2\Phi(-c)$ ist. **(1P)**

6.20 (Aus: S. Ross, *A First Course in Probability Theory*, 2nd ed. (New York: MacMillan, 1984)). An expert witness in a paternity suit testifies that the length (in days) of a pregnancy, from conception to delivery, is approximately normally distributed, with parameters $\mu = 270$, $\sigma = 10$. The defendant in the suit is able to prove that he was out of the country during the period from 290 to 240 days before the birth of the child. What is the probability that the defendant was in the country when the child was conceived? **(1P)**

6.21 Sei $X \sim Exp(\lambda)$ mit $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X > 1)$. Finden Sie $Var(X)$. **(1P)**

6.22 Sei $X \sim Exp(\lambda)$. Finden Sie k, so dass $\frac{\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X \leq k)} = a$ (wobei $a \in (0, \infty)$). **(1P)**

6.23 Eine Fischpopulation umfasst 100 Fische. Die Lebenserwartung eines Fisches ist exponentialverteilt und beträgt im Mittel 120 Tage. Es müssen mindestens 6 Fische bis zur nächsten Paarungszeit in 300 Tagen überleben, damit die Population nicht ausstirbt. **(1P)**

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fischpopulation überlebt.

(b) Angenommen unter den 100 Fischen befinden sich 40% Weibchen. Die mittlere Lebenserwartung der Weibchen beträgt 140 Tage, die der Männchen 100 Tage. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 4 Weibchen und 2 Männchen überleben.

6.24 Welche Verteilung haben $2X$, $-X$, $3X - 12$, wenn X normalverteilt ist mit $\mu = 4$ und $\sigma^2 = 12$. **(1P)**

6.25 Die Zeit zwischen dem Eintreffen zweier Kunden sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.3$. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen den Ankünften zweier Kunden mehr als 3 Minuten vergehen. **(1P)**

7 Mehrdimensionale Verteilungen

7.1 Es wird mit zwei vierseitigen Würfeln gewürfelt. Berechnen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X, die die maximale Augenzahl beschreibt, und der Zufallsvariablen Y, die die Summe der beiden Augenzahlen beschreibt. Sind die beiden Variablen unabhängig? **(1P)**

7.2 Es seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{64}, & \text{für } 0 \leq x \leq 4, \ -x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die marginale Dichte und die marginale Verteilung von Y und X.

(b) Sind X und Y unabhängig?

7.3 Es seien X und Y unabhängig und binomialverteilt, X mit Parametern n und p, Y mit Parametern m und p. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$. **(1P)**

7.4 Es seien X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie Verteilungsfunktion und Dichte von $X + Y$ sowie von $X + Y$ mod 1. (Die Modulo-Funktion 'mod' ist wie folgt definiert: für $x, y \in [0, 1]$ ist $x \bmod y = x + y$, falls $x + y \in [0, 1]$, und $x \bmod y = x + y - 1$, falls $x + y > 1$. D.h., diese Funktion rechnet mit Zahlen zwischen 0 und 1 in ähnlicher Weise, wie man üblicherweise mit Uhrzeiten rechnet: 17:00 + 2 Stunden gibt 19:00; 23:00 + 2 Stunden gibt 01:00.)

7.5 Es seien $X \sim Exp(\lambda)$ und $Y \sim U(-C, C)$ unabhängig. Berechnen Sie mittels Faltung die Dichte und Verteilungsfunktion von $X + Y$.

7.6 Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) ist durch **(1P)**

Y \ X	3	5	7
2	.12	.03	.23
5	0	.05	.09
8	.1	0	.08
9	.1	.14	.06

gegeben. Berechnen Sie

(a) die Kovarianz und die Korrelation zwischen X und Y und

(b) die marginale Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y.

7.7 Gegeben sei folgende gemeinsame Verteilung von X und Y.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0	0	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	0	$\frac{2}{64}$

Berechnen Sie **(1P)**

(a) die Kovarianz und die Korrelation zwischen X und Y und

(b) die marginale Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y.

(c) die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 1, Y = 2)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(Y \leq 3)$ und $\mathbb{P}(X < 3, Y \leq 4)$.

7.8 Berechnen Sie die Korrelation der Zufallsvariablen X und Y aus Beispiel 7.1. **(1P)**

7.9 Gegeben sei die gemeinsame Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

der Zufallsvariablen X und Y. Berechnen Sie die Randdichten und -verteilungen für X und Y. **(1P)**

7.10 Es sei X_1 normalverteilt mit Parametern μ_1 und $\sigma_1^2 > 0$ und X_2 normalverteilt mit Parametern μ_2 und $\sigma_2^2 > 0$. Weiters seien X_1 und X_2 unabhängig. Berechnen Sie mit Hilfe der Faltungsformel **(2P)**

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z - s) f_{X_2}(s) ds$$

die Dichte von $X_1 + X_2$.

7.11 Es seien X und Y unabhängige, identisch gamma-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\alpha, \beta > 0$; insbesondere haben also X und Y die Dichtefunktion

$$f(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\beta z}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel **(2P)**

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - s) f_Y(s) ds,$$

dass $X + Y$ gamma-verteilt ist mit Parametern 2α und β.

(b) Seien U, V unabhängige, identisch χ^2-verteilte Zufallsvariablen mit ν Freiheitsgraden. Berechnen Sie die Dichte von $U + V$. **(1P)**

Hinweis: Die Formel für die Dichte von $U+V$ folgt aus (a), da die χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden gerade eine Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha = \nu/2$ und $\beta = 1/2$ ist.

7.12 Berechnen Sie den Erwartungswert einer $F(\nu_1, \nu_2)$-verteilten Zufallsvariable. **(2P)**
Hinweis: Eine Zufallsvariable Z ist nach Definition $F(\nu_1, \nu_2)$-verteilt, wenn sich Z in der Form

$$Z = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$$

für unabhängige, χ^2-verteilte Zufallsvariablen U_1 und U_2 schreiben lässt. Dabei sind die Freiheitsgrade von U_1 gleich ν_1 und von U_2 gleich ν_2. Um den Erwartungswert von Z zu berechnen, verwende man die Unabhängigkeit von U_1 und U_2, um

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[U_1/\nu_1]\,\mathrm{E}\left[\frac{1}{U_2/\nu_2}\right]$$

zu erhalten.

7.13 Die Zufallsvariablen X und Y sind bivariat gleichverteilt auf $[-1, 1] \times [2, 5]$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

(a) $\mathbb{P}(X \leq 0, Y \leq 4)$
(b) $\mathbb{P}(X \leq -1, Y \leq 3)$
(c) $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq 3)$
(d) $\mathbb{P}(3X \leq Y)$

durch geometrische Überlegungen. **(1P)**

7.14 Gegeben sei ein Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$, der die Werte $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ mit jeweils gleichen Wahrscheinlichkeiten annimmt. **(1P)**

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Varianzen von X_1 und X_2.
(b) Berechnen Sie $Cov(X_1, X_2)$ and $\rho_{X_1 X_2}$.
(c) Ändern Sie die Verteilung, so dass $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{4}$ und die übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ haben und wiederholen Sie die Analyse aus (a), (b). Macht die errechnete Korrelation Sinn?

7.15 Die Realisierung einer eine mehrdimensionalen Zufallsvariable (X, Y) wird folgendermaßen ermittelt: wähle einen Punkt y aus der Verteilung mit der Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & \text{für } 0 < y < \sqrt{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Punkt x wird aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(-y, y)$ gezogen.

(a) Finden Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y.
(b) Finden Sie die marginalen Verteilungen von X und Y.
(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > 0)$.

7.16 Sei Y die exponentialverteilte Lebensdauer einer Glühbirne mit einer erwarteten Lebensdauer von 2 Stunden. Nehmen Sie an, die Glühbirne wird um 17:00 in einem Raum installiert und in Betrieb genommen. Zu einem zufälligen Zeitpunkt X Minuten nach 17:00 betritt Joe den zu diesem Zeitpunkt noch von der Glühbirne beleuchteten Raum.

(a) Was ist die erwartete Uhrzeit zu der Joe den Raum betritt?
(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Joe den Raum nach 18:40 betritt?
(c) Finden Sie die gemeinsame **Dichte** von X und Y und schreiben Sie die gemeinsame Verteilung als Integral an.

Hinweis: Gegeben die Glühbirne brennt nach y Minuten durch (also $Y = y$), dann kommt Joe zwischen 17:00 und 17:00+y Minuten in den Raum. Die Bedingte Verteilung von X ist also eine Gleichverteilung auf $[0, y]$. Der unbedingte Erwartungswert bzw. die unbedingte Wahrscheinlichkeit lassen sich nun als Integrale über die entsprechenden bedingten Verteilungen schreiben. Die Dichte in Punkt (c) ergibt sich durch die Formel $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

7.17 Seien X und Y wie in Beispiel 7.5. Berechnen Sie

(a) $f_{X+Y|Y=y}(z)$

(b) die gemeinsame Dichte von $X + Y$ und Y.

7.18 Sei $Y = -X$. Berechnen Sie $Cov(X, Y)$ and $\rho_{X,Y}$.

7.19 Seien X,Y zwei Zufallsvariablen mit $Var(X) = 1$, $Var(Y) = 2$ und $Cor(X, Y) = .5$. Berechnen Sie

(a) $Cov(X + Y, X + Y)$

(b) $Cov(X + Y, X - Y)$

7.20 A tobacco company produces blends of tobacco with each blend containing various proportions of Turkish, domestic and other tobacco. The proportion of Turkish and domestic in a blend are random variables (X = Turkish and Y = domestic) with joint density function

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y \le 1 \\ 0, \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Find the marginal density for the proportion of the domestic tobacco.

(b) Find the conditional density of X given $Y = \frac{3}{4}$.

(c) Find the probability that the proportion of Turkish tobacco is less than $\frac{1}{8}$, given that the blend contains $\frac{3}{4}$ domestic tobacco.

7.21 Betrachte die zweidimensionale Gleichverteilung auf der Scheibe

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

Es seien (X, Y) gemäß dieser Verteilung verteilt, dh die gemeinsame Dichte ist durch

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X gegeben Y.

(b) Berechnen Sie die marginalen Dichten von X und Y und $Cov(X, Y)$.

(c) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus (a), dass die Variablen X und Y zwar unkorreliert aber nicht unabhängig sind.

Hinweis: Die Kovarianz errechnet sich wie folgt $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, wobei

$$\mathbb{E}(XY) = \int_B xyf_{XY}(x,y)d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\frac{1}{\pi}dydx$$

und $\mathbb{E}(X) = \int \mathbb{E}(X|Y = y)f_Y(y)dy$

7.22 Geben Sie die Dichte der Bivariaten Normalverteilung mit den Randverteilungen $X \sim N(0.2, 0.3)$ und $Y \sim N(1.2, 1.7)$ und $\rho_{XY} = 0.5$ an.

7.23 Angenommen, Konsum (C) und Einkommen (Y) sind bivariat normalverteilt mit $\mu_C = 500$, $\mu_Y = 1500$, $\sigma_C = 160$, $\sigma_Y = 250$ und $\rho_{CY} = 0.7$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(C \le 400|Y = 1200)$.

7.24 Es sei X_1 normalverteilt mit Parametern μ_1 und $\sigma_1^2 > 0$ und X_2 normalverteilt mit Parametern μ_2 und $\sigma_2^2 > 0$. Weiters seien X_1 und X_2 unabhängig. Berechnen Sie mit Hilfe der Faltungsformel **(2 P)**

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-s)f_{X_2}(s)ds$$

die Dichte von $X_1 + X_2$.

7.25 Es seien X und Y unabhängige, identisch gamma-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\alpha, \beta > 0$; insbesondere haben also X und Y die Dichtefunktion

$$f(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\beta z}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel **(2 P)**

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-s) f_Y(s) ds,$$

dass $X + Y$ gamma-verteilt ist mit Parametern 2α und β.

(b) Seien U, V unabhängige, identisch χ^2-verteilte Zufallsvariablen mit ν Freiheitsgraden. Berechnen Sie die Dichte von $U + V$. **(1 P)**

Hinweis: Die Formel für die Dichte von $U+V$ folgt aus (a), da die χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden gerade eine Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha = \nu/2$ und $\beta = 1/2$ ist.

7.26 Berechnen Sie den Erwartungswert einer $F(\nu_1, \nu_2)$-verteilten Zufallsvariable. **(2 P)**

Hinweis: Eine Zufallsvariable Z ist nach Definition $F(\nu_1, \nu_2)$-verteilt, wenn sich Z in der Form

$$Z = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$$

fr unabhängige, χ^2-verteilte Zufallsvariablen U_1 und U_2 schreiben lässt. Dabei sind die Freiheitsgrade von U_1 gleich ν_1 und von U_2 gleich ν_2. Um jetzt den Erwartungswert von Z zu berechnen, verwende man die Unabhängigkeit von U_1 und U_2, um

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[U_1/\nu_1]\, \mathrm{E}\left[\frac{1}{U_2/\nu_2}\right]$$

zu erhalten.