Übungsblätter zur Mathematischen Statistik

WS 2009/ 2010

Institut für Statistik und Decision Support Systems
Universität Wien

1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ziele:

- Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsmaß, Verteilungsfunktion und Dichte verstehen.
- Kenntnis wichtiger Verteilungen aus den 2 praktisch bedeutsamen Klassen der atomaren und atomfreien Maße.
- Rechnen mit erzeugenden Funktionen.
- Verteilung von transformierten Zufallsvariablen. Wichtiger Spezialfall: Faltungen.

1.1 Wiederholung lineare Algebra

1.1 Bestimmen Sie den Rang folgenden Vektorsystems $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen!

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.3 Eine Matrix ist orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren orthogonal sind. Ist die Länge der Spaltenvektoren gleich 1, so heißt die Matrix orthonormal.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen orthogonal bzw. orthonormal sind!

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad B = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

1.4 Berechnen Sie die Determinante!

$$\text{(a)}\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.2 Satz von Bayes

1.5 Multiplikationssatz. Zeige, bzw. unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \ldots A_n] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2|\,A_1]\,\mathbb{P}[A_3|\,A_1 \cap A_2] \ldots \mathbb{P}[A_{n-1}|\,A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}]?$$

1.6 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Sei B_i ein vollständiges Ereignissystem (ie. $\mathbb{P}[B_i \cap B_j] = 0$ und $\mathbb{P}[\cup_j B_j] = 1$). Zeige, dass

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|\, B_i]\, \mathbb{P}[B_i]$$

und

$$\mathbb{P}[A|\, C] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|\, B_i \cap C]\, \mathbb{P}[B_i|C]\,.$$

1.7 Satz von Bayes. Sei B_i ein vollständiges Ereignissystem. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[B_{i_0}|\, A] = \frac{\mathbb{P}[A|\, B_{i_0}]\, \mathbb{P}[B_{i_0}]}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|\, B_i]\, \mathbb{P}[B_i]}$$

und

$$\mathbb{P}[A|\, C] = \frac{\sum \mathbb{P}[A|\, B_i \cap C]\, \mathbb{P}[C|\, B_i]\, \mathbb{P}[B_i]}{\sum \mathbb{P}[C|\, B_i]\, \mathbb{P}[B_i]}.$$

1.8 Von einem zuverlässigen Test zur TBC Diagnose weiß man, dass dieser Test in 94 von 100 Fällen negativ ausfällt, falls die Testperson nicht TBC hat und in 96 von 100 Fällen positiv ausfällt, falls die Terstperson an TBC erkrankt ist. Aus Erfahrung weiß man, dass im Durchschnitt von 250 Personen, die sich einer Reihenuntersuchung unterziehen, eine Person tatsächlich TBC hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person in Wirklichkeit TBC hat, wenn bei ihr dieser Test positiv ausgefallen ist?

Ist das Ergebnis verblüffend? Interpretieren Sie es!

1.9 John goes to the doctor claiming some discomfort. The doctor is led to believe that he may have some disease A. He then takes some standard procedures for this case: he examines John, carefully observes the symptoms and prescribes routine laboratory examinations.

Let θ be the unknown quantity of interest, indicating whether John has disease A or not. The doctor assumes that $P(\theta = 1|H) = 70\%$. H in this case contains the information John gave him and all other relevant knowledge he has obtained from former patients. To improve the evidence about the illness, the doctor asks John to undertake an examination.

Examination X is related to θ and provides an uncertain result of the positive negative type with the following probability distribution:

$$\begin{cases} P(X = 1|\, \theta = 0) = & 40\% \text{ (positive test without disease)} \\ P(X = 1|\, \theta = 1) = & 95\% \text{ (positive test with disease).} \end{cases}$$

Suppose that John goes through the examination and that his result is $X = 1$."

1. What should the doctor infer about John's disease?
2. The doctor decides to ask John to undertake a second test Y – more efficient, also more expensive – with the following probability distribution:

   $$\begin{cases} P(Y = 1|\, \theta = 0) = & 4\% \\ P(Y = 1|\, \theta = 1) = & 99\% \end{cases}$$

   What result can the doctor predict for the second test? Discuss necessary, additional implicit assumptions.
3. The observed result of the second test is $Y = 0$. What should the doctor infer about John's disease?

1.10 Let $\theta \sim N\left(\mu, \tau^2\right)$ and $X|\theta \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)$ with σ^2 known. What is the posterior distribution of θ, given X?

1.11 Two physicists, A and B want to determine the value of a physical constant. Physicist A, having a long experience in the area, specifies his prior as $\theta \sim N\left(900, 20^2\right)$. On the other side, physicist B stated a more uncertain prior $\theta \sim N\left(800, 80^2\right)$. Both physicists agree to make an evaluation of θ, denoted by X, using a calibrated device with sampling distribution $X|\theta \sim N\left(\theta|40^2\right)$. The value $X = 850$ is observed.

1.What do the physicists infer about θ?

2.Interpret the result.

1.12 Let $X_i|\theta,\ i = 1, ..., n$ be bernoulli trials with parameter $\theta \in [0, 1]$. Find a conjugate family of prior distributions for the joint sampling density.

1.13 Prove that the class of Γ distributions is closed under multiplication.

1.14 Let $L_1(\delta, \theta) = (\delta - \theta)^2$ be the loss associated with the estimation of θ by δ. Show that $\delta = E(\theta)$ minimizes the bayesian risk.

1.3 Maße, Verteilungen, Dichten

1.15 X eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Kann man *zwei verschiedene* Dichten finden, die zur obigen Verteilungsfunktion gehören?

1.16 Haben die folgenden Zufallsvariablen atomare oder atomfreie Maße? (oder weder noch)?

(a) Poissonverteilung mit Parameter $\theta > 0$:

$$P(X = x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Exponentialverteilung mit Parameter θ:

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\theta)} & x \geq \theta, \\ 0 & x < \theta. \end{cases}$$

(c) Die Verteilung

$$P(X \leq x) = x^2 1_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}(x) + \frac{1}{2}1_{\left(\frac{1}{2},2\right)}(x) + 1_{[2,\infty)}(x),$$

wobei 1 die Indikatorfunktion bezeichnet. (Hinweis: Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.)

(d) Sei $0 < p < 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1}.$$

1.17 Erfinden Sie je zwei atomare und atomfreie Maße. (Wenn möglich, nicht einfach Standardverteilungen der Statistik wählen!)

1.18 (+) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz zur Verteilungsfunktion aus letztem Beispiel, c). (Zur Lösung braucht man die Zerlegung von Verteilungen in Atome und atomfreien Teil.)

1.19 Man bestimme die Konstante C so, daß $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte wird:

(a) $f(x) = Cx^3e^{-x^4}$ für $x \geq 0$.

(b) $f(x) = Cx^{p-1}e^{-bx^p}$, $x \geq 0$, $b > 0$, $p > 0$. "Weibull-Verteilung"

(c) $f(x) = C\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. "Logistische Verteilung"

1.20 Ein zufälliger Punkt (X, Y) ist gleichverteilt auf dem Quadrat mit Eckpunkten $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

(a) $X^2 + Y^2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

(b) $3X - Y > 0$,

(c) $|X + Y| < 1/2$.

1.21 Eine Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + 2y) & \text{für } 0 \leq x \leq 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Konstante c.

(b) Berechne die Randverteilung von X.

(c) Berechne die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.

(d) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $Z = 3/(X + 1)^2$.

1.22 Eine Dichtefunktion sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^3 + 2xy) & 0 \leq x, y \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Konstante c.

(b) Berechne die Randverteilung von X.

(c) Berechne die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.

(d) Berechne den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von Y wenn $X = 1$.

1.23 Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X^2 < Y < X)$ falls X und Y

$$f(x,y) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 4, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als gemeinsame Dichte haben.

1.24 Die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2 sei $f(x_1, x_2) = \frac{1}{28}(4x_1+3x_2)$, $0 < x_1 < 2$, $0 < x_2 < 2$. Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $X_1 = x_1$.

1.25 (Transformationssatz für Dichten) Bezeichne f_Z die Dichte der Zufallsvariablen Z bzw. $f_{g(Z)}$ die Dichte von $Y := g(Z)$. Zeige, dass $f_{g(Z)}(y) = f_Z\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}\right)'(y)\right| = \frac{f_Z\left(g^{-1}(y)\right)}{|g'(g^{-1}(y))|}$.

NB: In höheren Dimensionen ist $\left(g^{-1}\right)'$ die Jakobimatrix und $|.|$ die Determinante.

1.26 Gegeben X_1 und X_2 mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

(x_1, x_2)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$
$p(x_1, x_2)$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$

Berechnen Sie die Randverteilungen und die bedingten Erwartungswerte!

1.27 Die (zufällige) Lebensdauer eines Geräts sei durch X gegeben. Die bedingte Dichte von X gegeben $X > x_0$ an der Stelle x_0 nennt man Hazardfunktion.

(a) Berechnen Sie die Hazardfunktion für X mit der Dichte f und der Verteilungsfunktion F.

(b) Wie lautet die Hazardfunktion der Exponentialverteilung? (Dichte $f(x) = 3e^{-3x}$, $x \geq 0$.) Berechne $P(X > 3|X > 1)$.

1.28 Seien $f(x_1|x_2) = c_1x_1/x_2^2$, $0 < x_1 < x_2$, $0 < x_2 < 1$, Null sonst, und $f_2(x_2) = c_2x_2^4$, $0 < x_2 < 1$, Null sonst, die bedingte Dichte von X_1 gegeben X_2 und die Randdichte von X_2.

(a) Bestimmen Sie c_1 und c_2.

(b) Wie lautet die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2?

(c) Berechnen Sie $P(1/4 < X_1 < 1/2|X_2 = 5/8)$ und $P(1/4 < X_1 < 1/2)$.

1.29 Betrachte die Maße P_1, P_2, P_3 die jeweils die Standardnormalverteilung, die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ und die Gleichverteilung auf $[0, 1/2]$ beschreiben. Sei weiters P_4 das zur Poissonverteilung mit $\lambda = 1$ gehörige Maß.

Betrachte jeweils eines der angegebenen Maße und bestimme welche der Maße $P_1, \ldots, P_4$ absolutstetig und welche singulär (weder/noch ist auch möglich!) bezüglich des betrachteten Maßes ist.

1.30 (Gestutzte Verteilung.) Angenommen X ist normal $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt.

(a) Berechne die bedingte Verteilungsfunktion von X, gegeben $a \leq X \leq b$. (a und b sind beliebige Konstanten.)

(b) Ermittle aus der bedingten Verteilungsfunktion die bedingte Dichtefunktion von X, gegeben $a \leq X \leq b$.

(c) Berechne den bedingten Erwartungswert von X, gegeben $0 \leq X \leq 1$.

(d) Berechne den bedingten Erwartungswert von X, gegeben $X \geq 0$.

1.31 Löse Aufgabe 1.30 falls X gleichverteilt auf $[-2,\, 2]$ ist.

1.32 Für einen nicht fairen Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten 1, 2, 3, 4 oder 5 zu würfeln jeweils 1/7. Die zufällige Variable X gebe die Augenzahl an.

(a) Definiere für dieses Beispiel den Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Zeichne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Sei λ das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$. Was ist richtig: $\mu \ll \lambda, \quad \lambda \ll \mu$? Erklärung!

(d) Berechne mittels der erzeugenden Funktion Erwartungswert und Varianz.

1.33 (a) Ist die Familie aller offenen Mengen von $\mathbb{R}$ eine σ-Algebra?

(b) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$.
Zeige: Wenn $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$ dann gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$

1.34 Eine zufällige Variable X sei gleichverteilt im Intervall $[0, 2]$.

(a) Bestimme Verteilungsfunktion und Dichte von X und berechne anschließend Erwartungswert und Varianz.

(b) Sei $Y := X^2$, berechne die Dichte der zufälligen Variable Y.

1.35 Berechne Mittelwert und Standardabweichung der folgenden Verteilung:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1+x^2}{4} & 0 < x \leq 1, \\ 1 - e^{-x} & x > 1. \end{cases}$$

Hinweis: Skizziere zuvor $F(x)$.

1.36 Sei die zufällige Variable X standardnormalverteilt, und die Variable Y normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. Seien P_X und P_Y die Maße der entsprechenden Verteilungen auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeige die Äquivalenz von P_X und P_Y.

(b) Berechne die Dichte von P_X bezüglich P_Y und die Dichte von P_Y bezüglich P_X.

1.37 Seien X und Y unabhängige zufällige Variable, jeweils mit Dichte

$$f(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0, \\ e^{-s} & s > 0. \end{cases}$$

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsdichte der Variable $Z := \sqrt{Y/X}$.

(b) Berechne den Erwartungswert von Z.

1.38 Es sei X eine $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariable und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monoton wachsende schiefsymmetrische Funktion ($g(-x) = -g(x)$) mit

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\,.$$

Bestimmen Sie die durch g erzeugte Gruppenfamilie.

1.39 Man beweise folgende Eigenschaften der Γ-Funktion, die durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

gegeben ist:

(a) $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x) \quad$ für $x > 1$.

(b) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Hinweis: Dichte der Normalverteilung.

1.40 Seien X_1 und X_2 unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $Y_1 = X_1 + X_2$ und $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ unabhängig sind.

Hinweis: Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von Y_1 und Y_2, sowie die beiden zugehörigen Randdichten. Beim Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems ist es mitunter sinnvoll, Gleichungen zu manipulieren anstatt zu addieren.

1.41 Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz einer Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = x 1_{(0,1/2)}(x) + \frac{2}{3} 1_{[1/2,2)}(x) + 1_{[2,\infty)}(x)\,, \tag{1}$$

wobei 1 die Indikatorfunktion bezeichnet.

1.4 Erzeugende Funktionen

1.42 Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $p_k = \mathbf{P}(X = k), k = 0, 1, 2, \ldots$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

(a) Zeigen Sie, daß $G(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ ("erzeugende Funktion") für $|s| \leq 1$ existiert (d.h. endlich ist).

(b) Wie hängen die Momente von X mit den höheren bleitungen von P an der Stelle 1 zusammen? $P'(1) = ?$ $P''(1) = ?$

(c) Berechnen Sie die erzeugende Funktion G, sowie Erwartungswert und Varianz für die geometrische Verteilung: $p_k = p(1-p)^k, k = 0, 1, 2, \ldots$.

(d) Berechnen Sie die Varianz der Poisson-Verteilung mit Parameter λ:

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

mittels der erzeugenden Funktion.

(e) Zeigen Sie für unabhängige Poisson-verteilte Zufallsgrößen mit Parametern λ und μ:

$$X \sim P(\lambda),\ Y \sim P(\mu) \Rightarrow X + Y \sim P(\lambda + \mu)\,.$$

1.5 Transformation von Zufallsvariablen

1.43 X sei gleichverteilt auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Man bestimme die Dichte von $Y = \tan X$.

1.44 Angenommen $\log(X-a)$ sei normalverteilt mit Mittel μ und Varianz σ^2. Zeigen Sie, daß die Dichte von X gegeben ist durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma(x-a)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\log(x-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}} & x > a\,, \\ 0 & x \leq a\,. \end{cases}$$

1.45 Es sei $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ die Dichte von Zufallsvariablen X_1 und X_2. Man finde die Dichte von $\frac{X_1+X_2}{2} = Z$ (X_1, X_2 unabhängig).

1.46 Unter den Angaben der letzten Aufgabe: Berechne die Dichte von $X_1 - X_2$.

1.47 Zeigen Sie, daß für M unabhängige, Exp(λ)-verteilte Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_M$ die transformierten Variablen

$$S_r = \sum_{k=1}^{r} Z_k / \sum_{j=1}^{M} Z_j, \quad r = 1, \ldots, M-1$$

eine Dichte der folgenden Form besitzen:
$g(s_1, s_2, \ldots, s_{M-1}) = (M-1)!$ für $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{M-1} \leq 1$
Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Zufallsvariablen $V_1 = Z_1$, $V_2 = Z_1 + Z_2, \ldots,$
$V_M = Z_1 + \ldots + Z_M$, führen Sie dann eine zusätzliche Zufallsvarible $S_M = V_M$ ein und bestimmen Sie $g(s_1, \ldots, s_{M-1})$ durch Herausintegrieren von S_M aus der gemeinsamen Dichte von $S_1, \ldots, S_M$.

1.48 Seien U und V unabhängig gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$. Zeigen Sie, daß
$X = \sqrt{-2\ln U} \cdot \cos(2\pi V)$ und $Y = \sqrt{-2\ln U} \cdot \sin(2\pi V)$ unabhängig standardnormalverteilt sind.

1.49 Eine Alternative zu Aufgabe (**??**), die approximativ standard-normalverteilte Zufallszahlen liefert, funktioniert folgendermaßen:
Erzeuge 12 Zufallszahlen U_i, die gleichverteilt auf $(0,1)$ sind. Berechne dann $X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$.

(a) Begründen Sie, warum X approximativ normalverteilt ist!

(b) Begründen Sie warum die obige Methode im Vergleich zu dem obigen Beispiel schlecht ist.

(c) Untersuchen Sie, wie gut (oder schlecht) die Approximation ist, indem sie die ersten vier Momente $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X^2$, $\mathbb{E}X^3$ und $\mathbb{E}X^4$ mit jenen der Standardnormalverteilung vergleichen.

1.50 Die n-dimensionale Zufallsvariable $\underline{X}$ sei normalverteilt mit Mittelwertsvektor $\underline{\mu}$ und Varianz-Kovarianz-Matrix Σ. Berechnen Sie die Dichte von $\underline{Y} = C\underline{X} + \underline{d}$, wobei C eine nichtsinguläre $[n \times n]$ Matrix ist.

Welche Verteilung hat Y, wenn X unabhängige standardnormalverteilte Komponenten X_i hat und C orthogonal ist?

Welche Kovarianzmatrix hat Y, wenn C die transponierte Matrix der normierten Eigenvektoren von Σ ist?

1.51 X sei zentral $\chi^2(n)$-verteilt und Y sei nichtzentral $\chi^2_\lambda(m)$-verteilt. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $F = \frac{Y}{m} / \frac{X}{n}$.

Hinweis:
$$f_{\chi^2(n)}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$$
$$f_{\chi^2_\lambda(m)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} f_{(\chi^2_{m+2k})}(y)$$

1.52 Seien X_1 und X_2 unabhängig $\chi^2(2)$–verteilt.
Bestimmen Sie die Dichte von $Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$.
Hinweis: Für die Dichten von X_1 und X_2 siehe den Hinweis zu Bsp. nn. Führen Sie eine geeignete Zufallsvariable Y_2 ein und berechnen Sie die Dichte von Y_1 als Randdichte der gemeinsamen Verteilung von Y_1 und Y_2. Beachten Sie die Integrationsgrenzen!

1.53 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige auf [0, 1] gleichverteilte Zufallsgrößen. Welche Verteilungsfunktion und welche Dichte hat $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$?

1.54 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige auf [0, 1] gleichverteilte Zufallsgrößen.

(a) Welche Verteilungsfunktion und welche Dichte hat $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

(b) Wogegen konvergiert $\frac{n}{\lambda} V$ in Verteilung, wenn $n \to \infty$?

1.55 Gegeben seien zwei Zufallsgrößen X und Y mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2)}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Ermittle die Korrelation zwischen X und Y!
Hinweis: Welche bekannte bivariate Verteilung hat (X, Y)?

1.6 Konvergenz von Zufallsfolgen

1.56 Zeigen Sie, daß die unten angeführten Folgen von Zufallsgrößen zwar in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher konvergieren.

(a) Die Folge von unabhängigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ und $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

(b) Sei $\Omega = [0, 1]$, $r_n = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})\mathrm{mod}1$ und P das Lebesgue–Maß.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [r_n, \min(r_n + 1/n, 1)], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.57 Betrachte die zufälligen Variablen $X_n = 2 + 1/n$ und $X = 2$. Diskutiere die folgenden beiden Fragen:

(a) Konvergiert X_n in Verteilung gegen X?

(b) Konvergiert X_n fast sicher gegen X?

(c) Konvergiert X_n in Wahrscheinlichkeit gegen X?

1.58 Diskutiere die folgenden beiden Fragen:

(a) Konvergiert X_n in Verteilung gegen X?

(b) Konvergiert X_n fast sicher gegen X?

(c) Konvergiert X_n in Wahrscheinlichkeit gegen X?

1.59 (Stichprobenmittel) Seien X_i (und X) unabhängig und identisch verteilt, definiere $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und zeige

(a) $\mathbb{E}\left[\bar{X}\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$,

(b) $\mathbb{V}ar\left[\bar{X}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{V}ar\left[X\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

1.60 (Stichprobenvarianz) Wie oben seien X, X_i unabhängig und identisch verteilt, definiere $V := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2$ und zeige

(a) $\mathbb{E}\left[V\right] = \frac{n-1}{n}\mathbb{V}ar\left[X\right]$,

(b) $\mathbb{V}ar\left[V\right] = \frac{(n-1)^2}{n^3}\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)^4\right] - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\mathbb{V}ar\left[X\right]^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1.61 (Die Formeln von Wald) Es seien

•X_i, N vollständig unabhängig und quadratisch integrierbar,
•X_i (und X) identisch verteilt und
•$\mathbb{P}\left[N \in \mathbb{N}\right] = 1$.

Definiere die Zufallsvariable $Z := X_1 + X_2 + \dots X_N$ und zeige

(a) $\mathbb{E}\left[Z\right] = \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[N\right]$ und

(b) $\mathbb{V}ar\left[Z\right] = \mathbb{V}ar\left[X\right]\mathbb{E}\left[N\right] + \mathbb{E}\left[X\right]^2\mathbb{V}ar\left[N\right]$.

2 Binäre Experimente

Ziele:

- Einen sinnvollen Stichprobenraum zu einem statistischen Problem nennen können.
- Randomisierte Testfunktionen beschreiben und erklären können.
- Welche Bedeutung hat die Randomisierung in Theorie und Praxis?
- Berechnung des Fehlers erster und zweiter Art und der Güte in einfacheren Beispielen. Wahl der Randomisierung, sodaß ein bestimmter Fehler erster Art erzelt wird.

2.1 Geben sie jeweils einen sinnvollen Stichprobenraum zu den unten angeführten Testproblemen an. Welche σ–Algebren könnte man auf den Stichprobenräumen dann wählen?

(a) Eine Münze wird 5 mal geworfen. Die Nullhypothese, daß Kopf und Zahl gleich wahrscheinlich sind, soll getestet werden.

(b) Um zu testen ob die mittlere Lebensdauer von Bildröhren mindestens 10000 Stunden beträgt wird die Lebensdauer von 20 Testbildröhren gemessen.

2.2 Betrachten Sie die Nullhypothese aus Beispiel 2.1 a) und die Alternative, daß der Anteil von "Kopf" (p) gleich 0.7 ist. Wie lauten die Verteilungen P und Q zu diesem binären Experiment?

Finden Sie einen (gegebenenfalls randomisierten) Test für den die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art 0.05 ist.

2.3 In einer Urne befinden sich Lose einer Lotterie auf denen die Namen der Teilnehmer(innen) vermerkt sind. Wir wollen testen, ob der Anteil der Männer, die Lose einsenden, gleich dem Anteil der Frauen ist, oder ob der Männeranteil (wie bei einer vergleichbaren ausländischen Lotterie) 0.4 beträgt. Dazu werden 8 Lose (ohne Zurücklegen) gezogen und notiert wie viele davon von Männern stammen. Wir wollen die notierte Anzahl mit T bezeichnen. Formulieren Sie H_0 und H_1 als unterschiedliche Verteilungen P und Q von T und konstruieren Sie dann einen (gegebenenfalls randomisierten) Test für den die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art 5% beträgt. Welchen Fehler 2. Art hat dieser Test?

2.4 Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Ergebnisse werden mit X_1, X_2, X_3 bezeichnet. Wir betrachten zwei Hypothesen über die Verteilung der Würfelergebnisse:

$$P: \ P(\{1\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$Q: \ Q(\{1\}) = \cdots = Q(\{5\}) = \frac{4}{25}, \ Q(\{6\}) = 1/5$$

Wir wollen $H_0 : P^{\otimes 3}$ gegen $H_1 : Q^{\otimes 3}$ testen und betrachten dazu die Zufallsgröße $N(X_1, X_2, X_3)$ die die Anzahl der gewürfelten sechsen angibt.

Berechnen Sie für die folgenden Testfunktionen jeweils den Fehler erster Art und den Fehler zweiter Art.

(a)

$$\Phi_1(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1 & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b)

$$\Phi_1(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1 & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 3 \\ \frac{49}{75} & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c)

$$\Phi_1(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1 & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d)

$$\Phi_1(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 6 \\ \frac{1}{5} & \text{falls } N(X_1, X_2, X_3) = 6, X_3 \neq 6 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.5 Eine Münze wird 5 mal geworfen. Die Nullhypothese, daß Kopf und Zahl gleich wahrscheinlich sind, soll getestet werden. Finden Sei einen (gegebenenfalls randomisierten) Test, für den die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art 10

2.1 Neyman-Pearson Tests

Ziel: Optimale Tests bei gegebenem Fehler erster Art für binäre Experimente angeben können.

2.6 Von einer Gattung der Familie der Asteracae wachsen auf den Inseln der Ägäis zwei nahe verwandte Arten, die sich in der Länge des Blütenstiels und der Anzahl der Haare auf den Blättern unterscheiden. Die Unterscheidung zwischen den Arten wird aber durch die individuelle Variation innerhalb der Art erschwert: Die Länge der Blütenstiele ist normalverteilt, wobei bei Art A $\mu_{A,1} = 9.4$ cm und bei Art B $\mu_{B,1} = 10.2$ cm beträgt. Die Varianz beträgt bei beiden Arten $\sigma_1^2 = 5.5\ cm^2$.

Die Anzahl der Haare auf einer Blattfläche von 1 cm^2 ist ebenfalls (annähernd) normalverteilt: Bei Art A ist $\mu_{A,2} = 48$ während bei Art B $\mu_{B,2} = 61$ beträgt. In beiden Fällen ist $\sigma_2^2 = 34$. Weiters kann man annehmen, daß die Merkmale Blütenstiellänge und Haarzahl voneinander unabhängig sind.

Biologen wollen nun testen, ob auf einer noch nicht untersuchten Insel Art A oder Art B vorkommt. (Aus Erfahrung ist bekannt, daß niemals beide Arten gleichzeitig auf einer Insel vorkommen, da Art A genetisch vitaler ist und Art B verdrängen würde.)

Da auf den meisten benachbarten Inseln Art A vorkommt, wird als Nullhypothese "Art A kommt vor" gewählt. Wie entscheidet der optimale Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, wenn auf der betreffenden Insel bei 30 gesammelten Individuen eine mittlere Blütenstiellänge von 9.7 cm und eine mittlere Anzahl von 36 Haaren beobachtet wurde?

2.7 $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsgrößen. Finden Sie den optimalen Test zu den Hypothesen:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$$
$$(\sigma_1^2 > \sigma_0^2) \qquad (\mu \text{ ist bekannt. })$$

2.8 Es sei X eine Zufallsvariable, die entweder nach einer Gleichverteilung in $[0,1]$ oder einer Dreiecksverteilung in $[0,1]$ verteilt ist (Dreiecksverteilung: $g(x) = 4x$ für $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $g(x) = 4 - 4x$ für $\frac{1}{2} \le x \le 1$). Man konstruiere den besten Test für $\alpha = 0.05$ auf Grund einer Beobachtung.

2.9 (Nachtrag zu Kapitel 1.3). Angenommen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und exponentialverteilt mit der Dichte $\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad x,\ \lambda > 0$. Welche Dichte hat dann $\sum_{i=1}^n X_i$? (Welchen Namen hat diese Dichte?)

2.10 Die Dichte der Zufallsvariablen sei $F(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, 0 < x < \infty$. Basierend auf einer Zufallsstichprobe vom Umfang 2 soll die einfache Hypothese $H_0 : \lambda = 1$ gegen die einfache Alternativhypothese $H_1 : \lambda = 3/2$ getestet werden. Der kritische Bereich des Tests φ sei $(x_1, x_2) : 5.5 \le x_1 + x_2 < \infty$.

(a) Bestimmen Sie Fehler erster und zweiter Art des Tests φ mit obigem kritischen Bereich.

(b) Bestimmen sie die Gütefunktion des Tests φ mit obigem kritischen Bereich.

(c) Ist φ unverfälscht?

(d) Sei α die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für φ. Ist φ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothese $H_0 \ : \ \lambda \le 1$ gegen die Alternativhypothese $H_1 \ : \ \lambda > 1$?

2.11 Von einer archäologischen Ausgrabung soll das Alter bestimmt werden; es existieren 2 Expertenmeinungen: H_0 : Alter 5.000 Jahre und H_1 : Alter 6.000 Jahre. Durch die Messung der Radioaktivität soll das Alter festgelegt werden. Falls H_0 zutrifft, ist die Anzahl der pro Minute emittierten Teilchen nach Poisson mit $\lambda = \frac{1}{2}$ verteilt, unter H_1 nach Poisson mit $\lambda = 3/2$. Man berechne die Fehler 1. und 2. Art für den Test, bei dem für H_0 entschieden wird, falls weniger als 1 Teilchen pro Minute gezählt wird. Wie lange muß man zählen, damit die Wahrscheinlichkeit H_1 fälschlicherweise abzulehnen, kleiner als 0.005 ist?
(**Hinweis:** zählt man n Minuten, gilt unter $H_0 : \lambda = n/2$, unter $H_1 : \lambda = 3n/2$).

2.12 $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig mit der Dichte

$$I_{[0,1]}(x) \qquad (\text{unter } H_0) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2} I_{[\theta,\theta+2]}(x) \qquad (\text{unter } H_1) \quad (\theta = 1/8)\,.$$

(a) Geben Sie einen optimalen (randomisierten) α-Niveau Test an.

(b) Wie sieht $h(\alpha) = \int \varphi_\alpha \, dQ$ aus? Zeichnen Sie die Funktion für $\alpha \in [0,1]$ und $n = 3$!

(c) Angenommen $\alpha = 0.025$. Wie groß muß n mindestens gewählt werden, damit die Macht des Tests 1 beträgt?

2.13 Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Dichte

$$\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \qquad x,\, \lambda > 0.$$

(a) Man bestimme den trennscharfen Test für die Hypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen die Alternative $H_1 : \lambda = \lambda_1$ falls $\lambda_1 < \lambda_0$ und $\alpha = 0.01$.

(b) Bestimmen Sie den kleinsten Stichprobenumfang bei $\alpha = 0.05$, $\lambda_1 = 500$, $\lambda_0 = 700$, wenn die Macht mindestens 0.95 sein soll.

2.14 Sei P die Gleichverteilung auf $(-2, 2)$ (Dichte $f(x)$) und Q die Standardnormalverteilung $N(0,1)$ (Dichte $g(x)$). Man möchte testen, ob X nach P oder nach Q verteilt ist.

(a) Wie lautet der Neyman-Pearson Test für $H_0 : P$ gegen $H_1 : Q$?

(b) Für welche Werte von X nimmt der Neyman-Pearson Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese an? Für welche Werte zum Niveau $\alpha = 0.01$?

(c) Zeichne den Dichtequotienten $\frac{g(x)}{f(x)}$ und markiere den Wertebereich von X für den der Neyman-Pearson Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese annimmt.

2.15 $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsgrößen.
Wir betrachten die Hypothesen: $H_0 : \mu = \mu_0$ (Dichte f,)
$H_1 : \mu = \mu_1$ (Dichte g)
(σ^2 ist bekannt, $\mu_1 > \mu_0$).

(a) Zeigen Sie, daß für den Likelihood-Quotienten gilt:

$$\frac{g(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} = \exp\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i - n \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2\sigma^2} \right).$$

(b) Für welche Werte des Likelihood-Quotienten lehnt ein bester α-Niveau Test φ_α ab?

(c) Berechnen Sie die die effiziente Randfunktion für φ_α aus b):

$$h(\alpha) = \int \varphi_\alpha \, dQ.$$

Verifizieren Sie, daß $h'(\alpha)$ gleich dem kritischen Wert für den Likelihood Quotienten ist.

(d) Wie groß muß man n wählen, um bei $\alpha = 0,05$ eine Güte $h(\alpha) = 0,95$ zu erhalten?

(**Hinweis:** Den ersten Teil der Lösung kann man dem Skriptum Bsp. 2.16 entnehmen.)

2.16 Angenommen eine Messung X soll vorgenommen werden, von der man glaubt, daß sie entweder standardnormalverteilt ist (Dichte $f(x)$), oder die Dichte $g(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$ hat.

(a) Wie lautet der Neyman-Pearson Test zu $H_0 : X \sim f$ gegen $H_1 : X \sim g$.

(b) Finde alle Werte von α für die der Annahmebereich die Form hat: "Entscheide für H_0, falls $-d \leq X \leq d$" und bestimme d als Funktion von α.

2.17 Betrachte nun zu obigem Beispiel zwei (unabhängige) Beobachtungen mit den entsprechenden Verteilungen unter H_0 und H_1, aber mit unbekanntem Mittelwert. Man kann das so formalisieren: Anstatt X_i $(i = 1, 2)$ mit Dichte f oder g beobachten wir die Zufallsvariablen $Y_i = X_i + \mu$, wobei μ unbekannt ist.

(a) Welche möglichen Verteilungen hat dann (Y_1, Y_2) unter H_0 und welche unter H_1? Bezeichnen wir die beiden Mengen der möglichen Verteilungen (oder Wahrscheinlichkeitsmaße) mit $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$.

(b) Finde eine Gruppe von Transformationen, bezüglich der $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$ invariant sind und formuliere das invariante Testproblem.

(c) Ist obiges Testproblem ein Strukturmodell?

(d) Finde eine maximalinvariante Statistik T zur Transformationsgruppe aus b). Welche Bedeutung hat T bei der Konstruktion des gleichmäßig besten invarianten Tests?

(e) Finde den gleichmäßig besten invarianten Test.

2.18 Betrachte einen Test φ für $H_0 : P$ gegen $H_1 : Q$ mit Fehler erster Art α und Fehler 2. Art β. Zeige: Wenn φ ein bester Test (Skriptum Def. 2.8) ist, dann gilt $\alpha + \beta \leq 1$.

2.19 Angenommem wir wollen einen schlechtesten Test für $H_0 : P$ gegen $H_1 : Q$ finden. Wir nennen einen Test φ^* schlechtesten Test, falls es keinen Test ψ gibt mit

$$\int \varphi^* \, dP \leq \int \psi \, dP, \quad \text{und}$$

$$\int \varphi^* \, dQ > \int \psi \, dQ.$$

(Vergl. mit der Def. 2.8 aus dem Skriptum für beste Tests.)

Zeige: Wenn φ ein bester Test zum Niveau $1 - \alpha$ ist, dann ist $\varphi^* = 1 - \varphi$ ein schlechtester Test zum Niveau α.

2.20 (a) Wie lautet der schlechteste Test in 2.8? (Siehe Bsp. 2.19.) Zeichne die effiziente Randfunktion $h(\alpha) = \int \varphi_\alpha \, dQ$ für den besten Test zum Niveau α aus Beispiel 2.8. Zeichne dann eine analoge Funktion $h^*(\alpha) = \int \varphi^*_\alpha \, dQ$ für die schlechtesten Tests ein und markiere den Bereich, der durch beide Kurven begrenzt wird.

(b) Welche Tests im markierten Bereich aus a) sind beste Tests?

(c) Zu jedem Punkt (α, β) im markierten Bereich kann man einen Test mit Fehler erster Art α und Fehler zweiter Art $1 - \beta$ konstruieren. Finde ein Konstruktionsverfahren für solche Tests! Wie groß muß man n wählen, um bei $\alpha = 0,05$ eine Güte $h(\alpha) = 0,95$ zu erhalten?

(**Hinweis:** Den ersten Teil der Lösung kann man dem Skriptum Bsp. 2.16 entnehmen.)

2.21 Löse Aufgabe 2.20, wenn die Alternative die Dichte $g(x) = 3x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ hat.

2.22 Manchmal ist die Hypothese von Interesse, daß Erwartungswert und Varianz von normalverteilten Zufallsgrößen in einem bestimmten Zusammenhang stehen. Wir betrachten daher Hypothesen der Form, daß $X_1, \ldots, X_n$ für ein bestimmtes a nach $N(\mu = \theta, \sigma^2 = a\theta)$ verteilt sind. (Natürlich setzen wir voraus, daß $\theta > 0$.)

(a) Wie lautet der beste Test beruhend auf den Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ zu den Hypothesen $H_0 : a = 1$ (also $X_i \sim N(\theta, \theta)$) gegen $H_1 : a = 2$ (also $X_i \sim N(\theta, 2\theta)$)?

(b) Angenommen die betrachteten Verteilungen sind von der Form $N(\mu = \theta, \sigma^2 = a\theta^2)$. Berechne analog zu a) den besten Test für $H_0 : a = 1$ gegen $H_1 : a = 2$.

2.23 Angenommen X_1, X_2 sind unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $(\theta, \theta + 1)$. Um $H_0 : \theta = 0$ gegen $H_1 : \theta = 1/8$ zu testen betrachten wir zwei Tests:

$$\varphi 1(X1)\& = \& \begin{cases} 1\& \text{ falls } X1 > 0.95\,, \\ 0\& \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\varphi 2(X1, X2)\& = \& \begin{cases} 1\& \text{ falls } X1 + X2 > C\,, \\ 0\& \text{ sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne C sodaß, φ_1 und φ_2 den gleichen Fehler erster Art haben.

(b) Beweise oder widerlege: Bei φ_2 ist der Fehler zweiter Art kleiner als bei φ_1. (Mit der Konstanten C aus (a).)

(c) Können Sie einen besseren Test als φ_2 finden? (Mit gleichem oder kleinerem Fehler erster Art.)

2.24 Angenommen X hat die Dichtefunktion $f(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Von der Zufallsvariablen $Y = X^{2\theta}$ liegt eine Beobachtung vor.

(a) Finde den besten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$ für $H_0 : \theta = 1$ gegen $H_1 : \theta = 2$ aufgrund dieser Beobachtung.

(b) Berechne den Fehler zweiter Art für diesen Test.

2.25 Es wäre ein Mißbrauch von Tests zum Niveau α, wenn man α so wählt (nachdem man die Daten gesehen hat), daß die Nullhypothese auf jeden Fall abgelehnt (oder angenommen) wird. Um zu sehen was die wahren Fehler erster und zweiter Art bei so einer Vorgehensweise sind, berechne $\alpha-$ und $\beta-$ Fehler für folgende triviale Tests:

(a) Lehne H_0 immer ab, egal welche Daten beobachtet wurden. (Äquivalent zur Praxis α so zu wählen, daß eine Ablehnung erzwungen wird.)

(b) Nimm H_0 immer an, egal welche Daten beobachtet wurden. (äquivalent zur Praxis α so zu wählen, daß eine Annahme erzwungen wird.)

2.26 Eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ wird einer $N(\mu, \theta)$-verteilten Population entnommen. Konstruiere einen optimalen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für $H_0 : \theta = 1$ gegen die Alternative $H_1 : \theta = 2$.

2.27 Von einer Population kennt man die Dichtefunktion

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$. Basierend auf einer Stichprobe X_1, X_2 wollen wir $H_0 : \theta = 2$ gegen $H_1 : \theta = 3$ testen.

(a) Konstruiere einen kritischen Bereich G zum Niveau 0.05 mit maximaler Power.

Hinweis: Der kritische Bereich besteht aus all jenen Ereignissen, die unter der Nullhypothese abgelehnt werden. Die Gleichung

$$k^2(1 - 2\log(k)) = 0.95$$

hat die näherungsweise Lösung $k = 0.84$.

(b) Berechne unter obigen Bedingungen die Güte der Alternative.

2.28

2.28 Eine Zufallsgröße sei exponentialverteilt

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $X_1, \ldots, X_N$ zufällige Stichproben. Finde den optimalen Test zu den Hypothesen $H_0 : \theta = 1$ gegen die Alternative $H_1 : \theta = 2$.
Hinweis: Mit Hilfe der Faltung berechnet man als ersten Schritt leicht die Dichte von $X_1 + X_2$, ebenso leicht als nächsten Schritt die Dichte von $X_1 + X_2 + X_3$ und dann verallgemeinert für $X_1 + \cdots + X_N$.

2.29 Eine Zufallsvariable sei binomialverteilt $B(n, \theta)$.

(a) Konstruiere einen gleichmäßig optimalen Test zum Niveau α für die Hypothese $H_0 : \theta \in [0, \theta_0]$ gegen die Alternative $H_1 : \theta \in (\theta_0, 1]$.

(b) Führe folgendes Experiment durch: Wirf eine Münze mindestens 20 mal und notiere jeweils den Ausgang (Kopf oder Zahl). Teste zum Niveau $\alpha = 0.05$ obige Hypothesen für $\theta_0 = 0.4$, $\theta_0 = 0.5$ und $\theta_0 = 0.6$.

2.2 Bayes Tests

2.30 Bei welchen Verlusten für die fälschliche Ablehnung von H_0 und H_1 ist der der Test aus 2.10 ein Bayes-Test?

2.31 Bestimmen Sie den Bayes-Test zu Beispiel 2.8 für $\lambda = 1$, $\lambda = 0.4$ und $\lambda = 0.5$ und berechnen Sie jeweils Fehler 1. Art und Fehler 2. Art. Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen λ und den resultierenden Fehlern erster und zweiter Art!

Für welchen Wert von λ hat der Bayes-Test aus 2.8 einen Fehler 1. Art von 5%? Wie groß ist dann der Fehler 2.Art?

2.32 Löse Beispiel 2.31 für das Testproblem aus 2.14.

3 Einfache Alternativen

(Skriptum, Kapitel 3.) **Ziele:** Erkennen der Struktur des Testproblems als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen. Bei endlichem Stichprobenraum ist das auftretende Problem mit Methoden der linearen Programmierung lösbar.

3.1 Ein Zufallsexperiment liefert die zwei möglichen Ergebnisse 0 und 1. Wir betrachten drei Verteilungshypothesen P_1, P_2 und Q, wobei $P_1(1) = 0.6$, $P_2(1) = 0.2$ und $Q(1) = 0.5$. Wir wollen zum Niveau $\alpha = 0.1$ (aufgrund einer Beobachtung) die Hypothese $H_0 : P_1$ oder P_2 gegen $H_1 : Q$ testen.

(a) Wie lautet das lineare Programm mit dem man den optimalen Test bestimmen kann?

(b) Bestimme den optimalen Test!

3.2 Löse Beispiel 3.1 falls $P_1(1) = 0.3$, $P_2(1) = 0.4$ und $Q(1) = 0.6$.

3.3 Betrachten Sie folgende Testprobleme für eine Binomialverteilung $B(1, p)$ zum Niveau α:

$$H_0 : \frac{1}{4} \le p < \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{2} < p \le \frac{3}{4}\,,$$
$$H_{1a} : p = \frac{1}{8} \qquad \text{bzw.} \qquad H_{1b} : p = \frac{7}{8} \qquad \text{bzw.} \qquad H_{1c} : p = \frac{1}{2}\,.$$

(a) Wie lauten die linearen Programme für die 3 Testprobleme?

(b) Ermittlen Sie graphisch den jeweils besten Test.

(c) Verifizieren Sie, daß die besten α–Niveau Tests gegen H_{1a} und H_{1b} auch gleichmäßig beste α–Niveau Tests gegen $H'_{1a}: \; p \in [0, 1/4)$ bzw. $H'_{1b}: \; p \in (3/4, 1]$ sind.

(d) Finden Sie die zu H_{1a} bis H_{1c} gehörigen ungünstigsten a-priori Verteilungen. (I.e. die Lösungen der dualen Optimierungsaufgabe.)

4 Zusammengesetzte Alternativen

4.1 Begriffe

Ziel: Begriffe üben: Test zum Niveau α, unverfälscht, zulässig.

4.1 Unter den Annahmen von Beispiel 2.23 aber für die Hypothesen $H_0 : \theta \le 0$ gegen $H_1 : \theta > 0$:

(a) Prüfe ob φ_1 und φ_2 (mit C aus 2.23) Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ sind!

(b) Sind φ_1 und φ_2 unverfälschte Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$?

(c) Sind φ_1 und φ_2 zulässige Tests?

4.2 Gegeben die Verteilungen P_θ mit $P_\theta(\{1\}) = \cdots = P_\theta(\{5\}) = \theta$, $(P_\theta(\{6\}) = 1 - 5\theta)$ und dazu die Hypothesen $H_0 : \theta = 1/6$, $H_1 : 1/10 < \theta < 1/6$. Betrachte nochmals die Tests φ_1, φ_2, φ_3 aus Beispiel 2.4.

(a) Prüfe ob φ_1, φ_2, φ_3 Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ sind!

(b) Sind φ_1, φ_2 und φ_3 unverfälschte Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$?

(c) Sind die Tests zulässig zu Ihrem jeweiligen Niveau?

4.3 Führe nochmals das Münzwurfexperiment von Bsp 5b des 2. Übungsblattes durch, teste nun jedoch zweiseitig, ob die Münze fair ist.

4.4 Eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ wird einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Population entnommen, wobei die Varianz bekannt sei.

(a) Konstruiere einen gleichmäßig besten einseitigen Test zum Niveau $\alpha = 0.1$ für $H_0 : \mu \leq 0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > 0$.

(b) Konstruiere einen gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$ für die Hypothese $\mu = 1$ gegen die Alternative $\mu \neq 1$.

4.5 Eine Zufallsgröße sei Poisson verteilt

$$f(x, \theta) := \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \quad x \in \mathbb{N},$$

und $X_1, \ldots, X_N$ seien zufällige Stichproben. Finde den gleichmäßig besten Test zu den Hypothesen $H_0 : \theta < 4$ gegen die Alternative $H_1 : \theta \geq 4$.
Hinweis: Beachte, dass die Summe unabhängiger Poissonverteilter Zufallsgrößen wiederum Poisson verteilt ist (zu welchem Parameter?).

4.6 Eine Stichprobe 0.2, 2.6, 1.1, -0.1, -1.3, 0.4, 1.7, 0.6 entstamme einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Population.

(a) Wie lautet der gleichmäßig beste einseitigen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ für $H_0 : \mu \leq 0$ gegen die Alternative $H_1 : \mu > 0$. Wie lautet die Teststatistik? Wird die Nullhypothese für die vorliegenden Daten beigehalten?

(b) Führe den zweiseitigen Test für die Hypothese $\mu = 0$ gegen die Alternative $\mu \neq 0$ durch.

4.7 (a) Teste für die Stichprobe aus Beispiel 1 die Hypothese $H_0 : \sigma \leq 1$ gegen die Alternative $H_1 : \sigma > 1$. (Wie lautet der beste unverfälschte Test)?

(b) Welche Power hat der Test gegen die Alternative $H_2 : \sigma = 2$?

4.8 Betrachte die Stichprobe aus Beispiel 1 und eine zweite Stichprobe 0.8, -1.2, -1.8, 0.6, 0.1, -0.3. Wir nehmen an beide Stichproben entstammen einer normalverteilten Population.

(a) Teste auf Gleichheit der beiden Mittelwerte.

(b) Teste auf Gleichheit der Varianzen.

(c) Angenommen es ist bekannt, dass beide Verteilungen den Mittelwert $\mu = 0$ haben. Wie sieht nun der Test auf Gleichheit der Varianzen aus?

Bemerkung: Es genügt zum Testen auf Gleichheit der Varianz die in der Vorlesung besprochene Methode der Bestimmung des Ablehnungsbereichs zu wählen (Herleitung des besten unverfälschten Testes ist zu schwierig).

4.2 Familien mit monotonem Dichtequotienten

4.9 Sind die Tests aus Beispiel 2.22 auch gleichmäßig beste Tests für $H_0 : a = 1$ gegen $H_1 : a > 1$?

4.10 Sei

$$f_\theta(x) = \frac{e^{(x-\theta)}}{\left(1 + e^{(x-\theta)}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

die Dichte einer logistischen Verteilung.

(a) Zeige: Die durch die Dichten $f_\theta(x)$ definierte Verteilungsfamilie hat monotonen Dichtequotienten.

(b) Wie lautet der beste α-Niveau Test für $H_0 : \theta = 0$ gegen $H_1 : \theta = 1$? (Basierend auf einer Beobachtung X.) Wie groß ist der Fehler zweiter Art, wenn $\alpha = 0.2$ ist?

(c) Zeige: Der Test aus b) ist auch gleichmäßig bester α-Niveau Test für $H_0 : \theta \leq 0$ gegen $H_1 : \theta > 0$.

4.11 Gegeben eine Beobachtung X von einer Cauchy-Verteilung mit Dichte

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x-\theta)^2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

(a) Hat obige Verteilungsfamilie monotonen Dichtequotienten?

(b) Zeige, daß der Test

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 < x < 3\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein bester Test für $H_0 : \theta = 0$ gegen $H_1 : \theta = 1$ zu seinem Niveau ist. Welchen Fehler erster und zweiter Art hat dieser Test?

(c) Ist der Test aus b) ein gleichmäßig bester Test für $H_0 : \theta \leq 0$ gegen $H_1 : \theta > 0$?

4.12 Gegeben die Cauchy-Skalenverteilungsfamilie mit Dichten

$$\frac{\theta}{\pi} \frac{1}{\theta^2 + x^2}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

und dazu eine Beobachtung X. Zeige: Die Verteilungsfamile hat keinen monotonen Dichtequotienten (in x). Betrachte jetzt die Verteilungen von $|X|$. Hat diese Verteilungsfamilie monotonen Dichtequotienten?

4.13 Seien $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe gleichverteilter Zufallsgrößen auf $[0, \theta]$.
Finden Sie den gleichmäßig besten Test für $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
Hinweis: Betrachte zunächst die Testprobleme $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$ und $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0$. Vergleichen Sie die resultierenden optimalen Teststatistiken.

4.14 Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger streng monotoner Verteilungsfunktion $F(x)$ und sei $Y = F(X)$.

Welche Verteilung hat Y?

4.15 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit der Dichte $\frac{1}{\lambda} e^{-(x-\mu)/\lambda}$ für $x \geq \mu$.
Bestimmen Sie den gleichmäßig besten Test für $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (λ ist bekannt).
Hinweis: Verwenden Sie, daß nach Bsp. 4.14 $U_i = F(X_i)$ gleichverteilt ist. Dann kann man Bsp. 4.13 verwenden.

4.16 Sei α die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art für φ aus Beispiel 2.10. Ist φ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothese $H_0 : \lambda \leq 1$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \lambda > 1$? (Begründung!)

4.17 Gegeben eine (unabhängige) Zufallsstichprobe der Größe 8: $X_1, X_2, \ldots, X_8$ mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x, \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, für $x \in \{0, 1\}$, null sonst. Wir betrachten die Hypothesen $H_0 : \theta = 1/3$ und $H_1 : \theta < 1/3$. Berechne die Gütefunktion $G(\theta)$ des Tests, der H_0 genau dann ablehnt, falls $\sum_{i=1}^{8} X_i \leq 1$ ist.
Hinweis: Die X_i sind Bernoulliverteilt. Welche gutbekannte Verteilung hat $\sum X_i$?

4.18 Gegeben eine (unabhängige) Zufallsstichprobe der Größe 5 $X_1, X_2, \ldots, X_5$ mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x, \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, für $x \in \{0, 1\}$, null sonst. Wir betrachten die Hypothesen $H_0 : \theta = 1/2$, $H_1 : \theta < 1/2$ und den Test, der
H_0 genau dann ablehnt, falls $\sum_{i=1}^{5} X_i \leq c$ ist. c ist eine Konstante. ($\sum_{i=1}^{5} X_i$ ist binomialverteilt.)

(a) Zeige: Der oben beschriebene Test ist ein gleichmäßig bester Test.

(b) Finde das Signifikanzniveau α, falls $c = 1$.

(c) Finde das Signifikanzniveau α, falls $c = 0$.

(d) Randomisiere den obigen Test so, daß $\alpha = 1/10$.

4.19 Gegeben eine (unabhängige) Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_4$ mit Dichte $1/\theta$, $0 < x < \theta$, null sonst. Wir betrachten die Hypothesen $H_0 : \theta = 2$ und $H_1 : \theta \neq 2$. Berechne die Gütefunktion $G(\theta)$ des Tests, der H_0 genau dann ablehnt, falls $\max_{1 \leq i \leq 4} X_i$ kleiner gleich 3/4 oder größer 2 ist.

4.3 Exponentialfamilien

Ziel: Bekannte Verteilungsfamilien als Exponentialfamilien identifizieren. Warum sind Exponentialfamilien in der Statistik wichtig? (Welche (für das Ableiten optimaler Tests) günstige Eigenschaften haben Sie?) (VO Abschnitt 4.2.)

4.20 Bezüglich welcher (natürlicher) Parameter sind die folgenden Verteilungsfamilien bei festen anderen Parametern Exponentialfamilien?

(a) Gammaverteilung

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}; \qquad x > 0; \alpha > 0, \beta \geq 1\,.$$

(b) Exponentialverteilung

$$f(x; \mu, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-(x-\mu)/\lambda}; \qquad x > \mu, \lambda > 0\,.$$

(c) Betaverteilung

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}; \qquad 0 \leq x \leq 1,\ \alpha \geq 1,\ \beta \geq 1\,.$$

(d) Binomialverteilung

$$f(x; \theta) = \binom{n}{k} \theta^x (1-\theta)^{n-x}; \qquad x = 0, 1, \ldots, n,\ 0 < \theta < 1\,.$$

(e) Paretoverteilung

$$f(x; \alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\gamma} (\frac{\gamma}{x})^{\alpha+1}; \qquad x > \gamma\,.$$

4.21 Bildet das Produkt von n Normalverteilungsdichten mit bekanntem Mittelwert μ_0 und unbekannter Varianz σ^2 eine Exponentialfamilie? Wie lautet der zugehörige natürliche Parameter θ und die zugehörige Statistik $T(x)$?

4.22 Die Gammaverteilung hat die Dichte

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}; \qquad x > 0; \alpha > 0, \beta \geq 1.$$

Zeige dass sowohl für α als auch für β eine einparametrige Exponentialfamilie vorliegt, wenn der jeweils andere Parameter festgehalten wird. Wie lautet der entsprechende natürliche Parameter θ sowie die zugehörige Teststatistik $T(x)$.

Zeige explizit, dass ein monotoner Dichtequotient vorliegt.

4.4 Beste unverfälschte Tests

4.23 Ist der Test aus 2.10 unverfälscht?

4.24 T_n/σ^2 sei χ^2–verteilt mit n Freiheitsgraden. Finden Sie für die Hypothesen

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \sigma^2 = 1\,, \\ H_1: &\quad \sigma^2 \neq 1 \end{aligned}$$

den besten unverfälschten α–Niveau Test ($\alpha = 0.1$). Wie groß muß n sein damit die Macht gleichzeitig für $\sigma^2 \geq 3/2$ und $\sigma^2 \leq 1/2$ mindestens 0.9 beträgt? Könnte man n kleiner wählen, wenn wir auch nicht unverfälschte Tests zum Niveau α betrachten?

4.25 Gegeben unabgängige Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ verteilt nach $N(\mu_0, \sigma^2)$ wobei μ_0 bekannt sei. Finde den gleichmäßig besten unverfälschten Test zu

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \sigma^2 = 2\,, \\ H_1: &\quad \sigma^2 \neq 2 \end{aligned}$$

für $\alpha = 0.05$ und $n = 12$.

4.26 Zeigen Sie:
Jeder gleichmäßig beste unverfälschte Test zum Niveau α ist zulässig.

4.27 Wir wollen aufgrund einer binomialverteilten Zufallsgröße die Hypothesen $H_0: p = \frac{1}{4}$ gegen $H_1: p \neq \frac{1}{4}$ testen. Bestimme den Annahmebereich des gleichmäßig besten unverfälschten Tests im Falle $n = 12$ und $\alpha = 0.05$.

4.28 Bei einem Versuch wurden 15 Realisierungen unabhängiger Poissonverteilter Zufallsgrößen (mit Parameter λ) ermittelt. Man möchter $H_0: \lambda = 0.6$ gegen $H_1: \lambda \neq 0.6$ testen. Lehnt der UMPU (gleichmäßig beste unverfälschte) Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ ab, falls die Summe der 15 Realisierungen $\sum x_i = 3$ beträgt? (Hinweis: Die Summe Poissonverteilter Zufallsgrößen ist wieder Poissonverteilt. (Aber mit welchem neuen Parameter λ?))

5 Lineare Modelle

Skriptum: Kapitel 4.

5.1 Invariante Tests

Ziele: Begriffe verstehen: Invariante Testprobleme und Statistiken, Strukturmodell, maximalinvariante Statistiken.
Rolle von maximalinvarianten Statistiken zur Konstruktion bester invarianter Tests.

5.1 Wir betrachten nochmals Aufgabe 2.16 haben jetzt aber zwei (unabhängige) Beobachtungen mit Verteilung aus 2.16 aber mit unbekanntem Mittelwert. Man kann das so formalisieren: Anstatt X_i $(i = 1, 2)$ beobachten mit Dichte f oder g beobachten wir die Zufallsvariablen $Y_i = X_i + \mu$, wobei μ unbekannt ist.

(a) Welche möglichen Verteilungen hat dann (Y_1, Y_2) unter H_0 und welche unter H_1? Bezeichnen wir die beiden Mengen der möglichen Verteilungen (oder Wahrscheinlichkeitsmaße) mit $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$.

(b) Finde eine Gruppe von Transformationen, bezüglich der $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_1$ invariant sind und formuliere das invariante Testproblem.

(c) Ist obiges Testproblem ein Strukturmodell?

(d) Finde eine maximalinvariante Statistik T zur Transformationsgruppe aus b). Welche Bedeutung hat T bei der Konstruktion des gleichmäßig besten invarianten Tests?

5.2 Löse Beispiel 5.1 für den Fall, daß der Mittelwert der Beobachtungen bekannt ist (o.B.d.A null) aber die Varianz unbekannt. Man kann das analog so formalisieren: Anstatt X_i $(i = 1, 2)$ beobachten wir die Zufallsvariablen $Y_i = \sigma X_i$, wobei σ unbekannt ist.

5.3 Löse Beispiel 5.1 für den Fall, daß X_1 und X_2 entweder standardnormalverteilt sind oder Cauchyverteilt mit Dichte $g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

5.4 Finde den gleichmäßig besten invarianten Test zu Beispiel 5.1 (mit Fehler erster Art $\alpha = 0.05$)!

5.5 Finde den gleichmäßig besten invarianten Test zu Beispiel 5.3 (mit Fehler erster Art $\alpha = 0.01$)!

5.6 Finde den gleichmäßig besten invarianten Test zu Beispiel 5.3, aber mit f als Dichte der doppelten Exponentialverteilung (und nicht als Dichte der Standardnormalverteilung). Wähle den Fehler erster Art $\alpha = 0.01$!

5.7 Erklären Sie in eigenen Worten: Welche Eigenschaft ergibt sich aus dem Satz von Hunt-Stein (Skriptum Satz 4.16) für die in 5.4 und 5.5 abgeleiteten Tests?

5.8 Man betrachte die Gruppe aller Transformationen

$$\pi_\sigma[(x_1,\ldots,x_n)] = (\sigma x_1,\ldots,\sigma x_n)$$

auf der Stichprobe $(x_1,\ldots,x_n)$. Eine Statistik $T(x_1,\ldots,x_n)$ heißt invariant bezüglich π, falls

$$T(\pi[x_1,\ldots,x_n]) = T(x_1,\ldots,x_n).$$

(a) Ist

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} (\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}) & \text{für } x_1 \neq 0\,, \\ (0,\ldots,0) & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}$$

invariant?

(b) Ist $T(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2}}$ invariant?

5.9 Zeige, dass die Menge aller Permutationen

$$\pi_s[(x_1,\ldots,x_n)] = (x_{s(1)},\ldots,x_{s(n)})$$

$$(s : \text{bijektiv} \quad \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\})$$

eine Gruppe bildet.

5.10 Man betrachte die Rangstatistik $T(x_1,\ldots,x_n) = (r_1,\ldots,r_n)$ ($r_i = j$ falls x_i das j–kleinste Element von $(x_1,\ldots,x_n)$ ist. Gleiche Elemente bekommen den gleichen Rang.)

(a) Man betrachte die Gruppe aller Transformationen

$$\pi_F[(x_1,\ldots,x_n)] = (F(x_1),\ldots,F(x_n))\,.$$

Dabei sei F eine beliebige streng monoton wachsende Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ist T bezügliche dieser Gruppe invariant?

(b) Ist T bezüglich der Gruppe aller Permutationen

$$\pi_s[(x_1,\ldots,x_n)] = (x_{s(1)},\ldots,x_{s(n)}) \quad \text{invariant?}$$

$$(s : \text{bijektiv} \quad \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\})$$

5.11 Man betrachte die Statistik

$$T(x_1,\ldots,x_n) = x_{(n)} - x_{(1)} \quad \text{(Spannweite)}$$

(a) Ist T bezüglich der Gruppe aller Permutationen invariant? (siehe Bsp. 5.10)

(b) Ist T bezüglich der Lagertransformationen

$$\pi_\mu[(x_1,\ldots,x_n)] = (x_1+\mu,\ldots,x_n+\mu) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

invariant?

5.12 Welche Statistiken aus 5.8, 5.10 und 5.11 sind maximalinvariant?

5.13 Gegeben sind zwei (unabhängige) Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ jeweils aus den Verteilungen $N(\xi, \sigma^2)$ und $N(\eta, \tau^2)$. Das Testproblem $H_0 : \tau^2 = \sigma^2$ gegen $H_1 : \tau^2 \neq \sigma^2$ ist invariant bezüglich der durch die Transformationen

$$X_i' = aX_i + b, \quad Y_i' = aY_i + b, \quad (a \neq 0),$$

$$\text{und} \quad X_i' = Y_i, \quad Y_i' = X_i$$

erzeugten Gruppe. Zeige: Der gleichmäßig beste, unter G invariante Test lehnt H_0 ab, falls $W \geq k$ mit

$$W = \max\left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}.\right)$$

Hinweis: Der Quotient der Dichten von W unter $\tau^2/\sigma^2 = \Delta$ und $\tau^2/\sigma^2 = 1$ ist proportional zu

$$\left(\frac{1+w}{\Delta + w}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+w}{1+\Delta w}\right)^{n-1},$$

falls $w \geq 0$. Die Ableitung des obigen Ausdrucks ist für alle $\Delta \geq 0$.

5.2 p-Werte

5.14 Wir untersuchen das Testproblem $H_0 : \mu \leq 0$, $H_1 : \mu > 0$ für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ unabhängiger normalverteilter ($N(\mu, \sigma^2)$) Zufallsgrößen mit bekannter Varianz. Betrachte die Statistik

$$T = \frac{\bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

und den Test, der H_0 ablehnt, falls T einen kritischen Wert c überschreitet.

(a) Welche Verteilungsfunktion F_μ hat T in Abhängigkeit von μ?

(b) Welche Verteilung hat der p-Wert $1 - F_0(T)$?

(c) Skizziere die Dichte des p-Werts bei $n = 4$ und $\sigma = 1$, für $\mu = -1/4$, $\mu = 0$ bzw. für $\mu = 1/2$!

5.15 Wir untersuchen das Testproblem $H_0 : \lambda \leq 1$, $H_1 : \lambda > 1$ für eine exponentialverteilte Zufallsgröße X mit Verteilung $1 - \exp(-x/\lambda)$. Betrachte die Statistik

$$T = X$$

und den Test, der H_0 ablehnt, falls T einen kritischen Wert c überschreitet.

(a) Welche Verteilungsfunktion F_λ hat T in Abhängigkeit von λ?

(b) Welche Verteilung hat der p-Wert $1 - F_1(T)$?

(c) Skizziere die Dichte des p-Werts für $\lambda = 1/2$ bzw. für $\lambda = 1/2$!

5.3 Multiples Testen

Skriptum: Abschnitt 4.1

5.16 Ein den Blutdruck senkendes Medikament besteht unseren Kontrolltest, wenn die mittlere Blutdrucksenkung 1 Stunde nach der Einnahme mindestens 20 beträgt. Zu fünf Medikamenten wurde jeweils an 10 Patienten die Blutdruckdifferenz (vorher minus nachher) gemessen. Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

	Medikament				
Wirkung	1	2	3	4	5
Mittel	25	29	32	31	24
$s_{\bar{x}}$	3	3	4	4	2

Wir wollen aufgrund obiger Daten die 5 Medikamente testen. Dabei ist jeweils $H_0 : \mu \leq 20$ und $H_1 : \mu > 20$. Wir nehmen dazu an, daß die Beobachtungen Realisierungen normalverteilter Zufallsgrößen sind.

(a) Teste die 5 Medikamente! (Mittels Standard-t-Test jeweils zum Niveau $\alpha = 0.05$.)

(b) Fasse nun obige 5 Tests als eine einzige multiple Testprozedur auf. Hält diese Prozedur das multiple Niveau $\alpha = 0.05$? Erklären Sie in eigenen Worten, was "Halten des multiplen Niveaus" im Zusammenhang unseres Beispiels bedeutet.

(c) Führen Sie den multiplen Test nach Bonferroni zu obigen Daten durch. Welche Medikamente bestehen nun unseren Kontrolltest? (Vgl. mit a.)

(d) Welche Medikamente bestehen den Kontrolltest, wenn Holm's multipler Test durchgeführt wird?

(e) Welches multiple Niveau α hat die Testprozedur aus a? Bei welchem Niveau γ für die individuellen Tests beträgt das multiple Niveau genau $\alpha = 0.05$?

5.17 Löse Aufgabe 5.16 für das multiple Niveau $\alpha = 0.1$ mit folgenden Meßergebnissen:

	Medikament				
Wirkung	1	2	3	4	5
Mittel	23	28.5	30	25.5	24
$s_{\bar{x}}$	1	3	4	2	2

5.18 Beweise das Abschlußtestprinzip.

5.19 Wie kann man Holm's Test als Spezialfall des Abschlußtestprinzips herleiten, wenn für k Populationen alle paarweisen Mittelwertsdifferenzen von Interesse sind? (D.h. $H_{0,i,j} : \mu_i = \mu_j$, $H_{1,i,j} : \mu_i \neq \mu_j$ für $i \neq j$.)

5.20 Gegeben drei Populationen mit (unbekannten) Mittelwerten μ_1, μ_2, μ_3. Sind folgende Familien von Hypothesen abgeschlossen? Wenn nicht bilde den Abschluß!

(a) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_0 : \mu_1 = \mu_3$.

(b) Alle paarweisen Vergleiche $H_{0,ij} : \mu_i = \mu_j$. $(i \neq j)$.

(c) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

5.4 Asymptotischer Vergleich von Tests

5.21 Löse Beispiel 4.4 des Skriptums, wenn die konkurrenzierenden Teststatistiken Stichprobenmedian und arithmetisches Mittel sind. Wie groß ist die ARE für den Mediantest im Vergleich zum Test, der das arithmetische Mittel verwendet?
Hinweis: Für u.i.v. Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktion F und stetiger Dichte f gilt für den Median M_n: $\sqrt{n}(M_n - F^{-1}(1/2)) \to N(0, \frac{1}{[2f(F^{-1}(1/2))]^2})$ in Verteilung.

5.22 Wir wollen die Mittelwerte zweier Populationen mit Verteilung $F(x - \theta_1)$ bzw. $F(x - \theta_2)$ aufgrund von gepaarten Stichproben vergleichen. Berechne die ARE für die Teststatistik $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ gegen den Vorzeichentest für

(a) F gleich der Standardnormalverteilung.

(b) Löse a) auch für den Fall, daß die Varianz bekannt ist und statt dem t-Test der Normalverteilungstest verwendet wird.

6 Schätzmethoden

(Skriptum: Kapitel 5)

6.1 Seien $X_{[1]}$, $X_{[2]}$ und $X_{[3]}$ die Ordnungsstatistiken einer (unabhängigen) Zufallsstichprobe der Größe 3 aus der Gleichverteilung auf $[\theta, 1 + \theta]$.

(a) Berechnen Sie die Dichte von $T := (X_{[1]} + X_{[3]})/2$. Wie kann man aus T einen Schätzer für θ konstruieren?

(b) Berechnen Sie die Dichte des Medians $X_{[2]}$ Wie kann man aus $X_{[2]}$ einen Schätzer für θ konstruieren?

(c) Dasselbe für das Minimum $X_{[1]}$.

(d) Dasselbe für das arithmetische Mittel $(X_1 + X_2 + X_3)/3$.

(e) Welcher der Schätzer ist aufgrund obiger Überlegungen am besten?

6.2 Berechnen Sie die Fisher-Information für

(a) $N(0, \sigma^2)$.

(b) Poisson (λ).

(c) $B(n, p), n.$ fest

6.3 Zeigen Sie, daß für eine Lageparameterfamilie $(f_\vartheta(x)) = f(x - \vartheta)$ die Fisher-Information $I(\vartheta)$ unabhängig von ϑ ist.

6.4 Sei $\xi = g(\vartheta)$ und $\nu = h(\xi) = g^{-1}(\xi)$. Man zeige: $I(\xi) = I(h(\xi)).(h'(\xi))^2$

6.5 Finden Sie eine Funktion $\xi = g(p)$ derart, daß $I(\xi)$ für eine $B(n, p)$-Verteilung konstant ist.

6.6

(a) Für das Binomialmodell $B(n,p)$ finde man den Bayes-Schätzer in bezug auf die Vorbewertung $Beta(a,b)$ mit der Dichte $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}$.

(b) Wählen Sie a und b so, daß dieser Bayes-Schätzer konstantes Risiko hat.

6.7 Es sei $f(x)$ die Dichte einer ZV X. Der Quartilsabstand der Verteilung ist definiert durch

$$S_{(0.5)} = x_{(0.75)} - x_{(0.25)}$$

wobei $x_{(p)}$ als Lösung der Gleichung $p = \int_{-\infty}^{x_{(p)}} f(x)dx$ definiert ist.

Man bestimme mittels der Substitutionsmethode eine Schätzung für $S_{(0,5)}$. Unterscheidet sich dieser Schätzer vom üblichen Quartilsabstand der deskriptiven Statistik?

6.8 (Getrimmtes Mittel) Für eine Verteilung mit Dichte $f(x)$ sei der Parameter μ_α durch

$$\mu_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_{x_{(\alpha/2)}}^{x_{(1-\alpha/2)}} xf(x)dx$$

definiert. ($x_{(p)}$ wie in Bsp.6.7)

Man zeige, daß μ_α ein Lageparameter ist und bestimme mit der Substitutionsmethode eine Schätzung für μ_α.

6.9 Man bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer für γ von gleichverteilten zufälligen Variablen mit der Dichte

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \gamma - \frac{1}{2} \le x \le \gamma + \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.10 Man bestimme den Momentschätzer für α und β der Betaverteilung mit der Dichte

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} & 0 < y < 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Probleme treten bei der Bestimmung des Maximum Likelihood-Schätzers auf?

6.11 Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige ZV die nach einer Gleichverteilung

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \le x \le \theta\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilt sind.

(a) Man zeige $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$ ist der Maximum Likelihoodschätzer für den Parameter θ.

(b) Man bestimme eine Schätzung von θ mit der Momentmethode.

6.12 Man bestimme den Momentschätzer für die Parameter α und β der Gammaverteilung.

6.13 Man bestimme die Maximum Likelihood-Schätzer für die Parameter μ und λ der Exponentialverteilung

$$f(x;\mu,\lambda) = \frac{1}{\lambda}e^{-(x-\mu)/\lambda}; \qquad x > \mu, \lambda > 0$$

beruhend auf n voneinander unabhängigen Beobachtungen.
Hinweis: Es ist gleichbedeutend die Likelihood oder den Logarithmus der Likelihood zu maximieren.

6.14 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Beobachtungen mit Dicht $f(x, h)$. Man bestimme die Likelihoodfunktion für folgende spezielle Dichten $n = 10$:

(a) Poissonverteilung

$$f(x,\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} \quad x = 1,\, 2, \ldots .$$

(b) Exponentialverteilung

$$f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}; \qquad x \geq \theta\,.$$

Wie hängt die Likelihoodfunktion von n ab?

6.15 X nehme die Werte 1 und 0 mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $(1-p)$ an. Es sei bekannt, daß $1/3 \leq p \leq 2/3$.

(a) Finden Sie den Maximum–Likelihood Schätzer für p. (Bei einer Beobachtung).

(b) Man vergleiche den Schätzer aus (a) mit dem Schätzer $T(x) \equiv \frac{1}{2}$ hinsichtlich des MSE. ($MSE_p(T)=$ $\mathbb{E}_p(T(x)-p)^2$).

6.16 Man berechne den Maximum–Likelihood Schätzer zur doppelten Exponentialverteilung: ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit $f(x, \mu) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$).

6.17 Bei einem neuen Intelligenztest nimmt man an, daß die Ergebnisse normalverteilt sind mit unbekanntem Mittelwert μ und Varianz 10.

Unter der Annahme einer Gleichverteilung im Intervall (90,110) als Aprioriverteilung für μ und 20 unabhängigen identisch verteilten Beobachtungen zeige man, daß für die Posterioriverteilung gilt:

$$p(\mu|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Phi(\frac{110-\bar{x}}{1/\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{90-\bar{x}}{1/\sqrt{2}})}e^{-(\bar{x}-\mu)^2} \qquad 90 < \mu < 110$$

wobei $\bar{x}$ den Mittelwert der zwanzig Beobachtungen bedeutet. Man bestimme den Bayes–Schätzer für μ.

6.18 Die Zeiten eines 100 yard Läufers seien gleichverteilt im Intervall $(\alpha; 10.5)$. Für α seien die beiden gleichwahrscheinlichen Fälle $\alpha = 9.5$ oder 9.7 möglich.

Man bestimme die Posterioriverteilung, wenn man eine Laufzeit von 10.0 gestoppt hat.

6.19 Es seien

$$f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}e^{-n\lambda}$$

(Poissonverteilung) als Likelihood–Funktion und

$$p(\lambda) = \frac{1}{m!}(\frac{m+1}{\lambda_0})^{m+1}\lambda^m e^{-(m+1)\lambda/\lambda_0}$$

(γ–Verteilung) als a–priori Verteilung gegeben.

Man bestimme den Bayesschätzer für λ

6.20 Es seien $3n$ Beobachtungen $X_1 \dots X_n, Y_1 \dots Y_n, Z_1 \dots Z_n$ alle mit gleicher Varianz σ^2 (unbekannt) gegeben. Es gelte

$$\mathbb{E}(X_i) = m_1 \qquad \mathbb{E}(Y_i) = m_2 \qquad \mathbb{E}(Z_i) = m_1 + m_2$$

Man bestimme die kleinste Quadratschätzung für m_1, m_2 und die Schätzung für σ^2.

6.21 Es seien wieder Beobachtungen wie in Aufgabe 26 gegeben und

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbb{E}(X_i) & = & \theta_1 & + & \theta_2 & + & \theta_3 \\ \mathbb{E}(Y_i) & = & -\theta_1 & + & \theta_2 & + & \theta_3 \\ \mathbb{E}(Z_i) & = & -2\theta_2 & + & \theta_3 & & \end{array}$$

Man bestimme die kleinsten Quadratschätzungen für $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sowie die Schätzung von σ^2.

6.22 Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige zufällige Variable, die alle dieselbe Verteilung besitzen.

Man zeige: Wenn $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ ist, dann ist die Schätzung ($\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ erwartungstreu für σ^2.

6.23 Man zeige, daß $S = \sqrt{S^2}$ im allgemeinen nicht erwartungstreu für σ ist. Anleitung: Man betrachte unabhängige nach $N(a, \sigma^2)$ verteilte Variable $X_1, \dots X_n$; dann besitzt $\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$ eine χ^2–Verteilung mit $(n-1)$ Freiheitsgraden.

Man betrachte $\mathbb{E}(\frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1})$ und $\mathbb{E}(S; \sigma)$. Alternativ: Man verwende Jensens Ungleichung.

6.24 Man zeige, daß $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{(n+1)}{n}\max_{1 \le i \le n}(X_i)$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter α einer Gleichverteilung auf $(0, \alpha)$ ist. Anleitung: Man betrachte die Verteilungsfunktion F von $\max(X_i)$ und finde durch Differenzieren die Dichte.

6.25 Es seien T_1 und T_2 zwei unabhängige erwartungstreue Schätzungen für einen Parameter θ mit Varianzen σ_1^2 und σ_2^2. Dann ist auch $T = (1-a)T_1 + aT_2$ erwartungstreu für θ für jedes a.

Wann ist die Varianz von T minimal?

6.26 Es seien $X_1 \dots X_n$ gleichverteilt in $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$; dann ist $W = \frac{\max X_i + \min X_i}{2}$ erwartungstreuer Schätzer für a. Anleitung: Man betrachte die Verteilungsfunktion von $\max X_i$ und finde die Dichte durch Differenzieren.

6.27 Es seien $X_1 \dots X_n$ Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und $\mathbb{V}ar X_i = k_i\sigma^2$. Es sei $\sum a_i X_i$ ein Schätzer für μ.

(a) Man finde eine Bedingung für die a_i derart, daß der obige Schätzer erwartungstreu wird.

(b) Unter der Bedingung aus a) bestimme man die a_i so, daß die Varianz des Schätzers minimal wird.

6.28 Berechne den Bayes-Schätzer für μ zu einer Stichprobe von n normal $N(\mu, 1)$ verteilten Zufallsgrößen, wenn die Vorbewertung für μ die Standardnormalverteilung ist und (wie im Skriptum) die quadratische Verlustfunktion gewählt wird.

6.29 Sei $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}$ die Dichte zu einer Beobachtung X.

(a) Nach der Chapman–Robbins Ungleichung läßt sich die Varianz eines beliebigen erwartungstreuen Schätzers T durch

$$\mathbb{V}_{\theta_0} T \geq \sup_{\theta \in \Theta_0} \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\{Var\}_{\theta_0} L_{\theta_0,\theta}}$$

abschätzen. Dabei ist $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\} | P_\theta \ll P_{\theta_0}\}$ und

$$L_{\theta_0,\theta} = \begin{cases} \frac{f(x,\theta)}{f(x,\theta_0)} & \text{falls } f(x,\theta_0) > 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Likelihood–Quotient. Berechnen Sie die Chapman–Robbins–Schranke für unser Beispiel.

(b) Nach Aufgabe (30) ($n = 1$) ist $T(x) = 2x$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ_0.

Berechnen Sie $\{Var\}_{\theta_0} T$ in diesem Fall.

(c) Nach dem Satz von Rao hat ein erwartungstreuer Schätzer T genau dann gleichmäßig kleinste Varianz (unter allen erwartungstreuen Schätzern), falls gilt:

$$E_\theta T \hat{o} = 0 \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall \hat{o} \in \mathcal{E}$$

.

Dabei ist $\mathcal{E}$ die Menge aller $L_2(\Theta)$ Nullschätzer, d.h. die Menge aller Funktionen $\hat{o}$, sodaß $E_\theta \hat{o} = 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad$ und $\quad \{Var\}_\theta \hat{o} < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$.

Man beweise mittels des Satzes von Rao die Optimalität (kleinste Varianz) von T aus Punkt b). Man vergleiche nun $\{Var\}_{\theta_0} T$ aus b) mit der Chapman–Robbins Schranke.

Anleitung: man zeige, daß $\mathcal{E}$ nur Funktionen enthält, die fast überall Null sind.

(d) Nach dem Satz von Lehmann–Scheffé ist T unter den erwartungtreuen Schätzern optimal, falls T auch suffizient und vollständig ist. Man verwende diesen Sachverhalt um nachzuweisen, daß im Falle einer Stichprobe mit n Beobachtungen

$$T(X_1, \ldots, X_n) := \frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n}(X_i)$$

ein optimaler Schätzer für θ ist.

6.30 Man zeige

(a) $\frac{1}{n} \sum (X_i - \mu)^2$ ist effizient für σ^2 einer Familie $N(\mu, \sigma^2)$.

(b) $\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ ist nicht effizient für σ^2 einer Familie $N(\mu, \sigma^2)$.

6.31 Man untersuche ob $\frac{1}{n} \sum X_i$ eine effiziente Schätzung für p einer Binomialverteilung ist.

6.32 Man bestimme eine effiziente erwartungstreue Schätzung für den Parameter λ einer Poissonverteilung.

6.33 Man zeige, daß in einer einparametrigen Exponentialfamilie $f(x,\theta) = e^{(c(\theta)T(X) + d(\theta) + S(x))}$ die Statistik $T(X)$ ein effizienter erwartungstreuer Schätzer für $m(\theta) = -\frac{d'(\theta)}{c'(\theta)}$ ist.

6.34 Gegeben seien die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit Dichte $f(\frac{x_i-\mu}{\sigma})$. Eine Statistik T ist Lage–equivariant, falls gilt:

$$T(x_1+a, \dots, x_n+a) = T(x_1, \dots, x_n) + a \quad a \in \mathbb{R}$$

Eine Statistik T ist Skalen–equivariant, falls

$$T(\sigma x_1, \dots, \sigma x_n) = \sigma^r T(x_1, \dots, x_n) \quad \sigma > 0$$

für eine Potenz r.

Untersuche, welche der folgenden Statistiken Lage- bzw. Skalen–equivariant sind!

(a) $T(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

(b) $T(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$.

(c) $T(x_1, \dots, x_n) = \min_{1\le i\le n} x_i - c$.

(d) $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 & \text{falls} x_3 \geq 0\,, \\ x_2 & \text{falls} x_3 < 0\,. \end{cases}$

6.35 Gegeben seien die Zufallsvariablen $x_1, \dots, x_n$ mit Dichte $f(x_1-\mu, \dots, x_n-\mu)$. In diesem Fall hat der Lage–equivariante Schätzer, der das quadratische Risiko $\mathbb{E}_\mu(T-\mu)^2$ minimiert, die Gestalt

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u f_{\mu=0}(x_1-u, \dots, x_n-u)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu=0}(x_1-u, \dots, x_n-u)\,du}\,.$$

Man berechne den (hinsichtlich dieses Kriteriums) optimalen Schätzer im Falle einer Stichprobe unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit unbekanntem μ und bekanntem λ. (siehe Bsp.4.20)

6.36 Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit $\mu = 0$ (siehe Bsp.4.20). Mit einer Skalen–equivarianten Statistik T kann man einen optimalen equivarianten Schätzer hinsichtlich des quadratischen Risikos $\mathbb{E}_\lambda[\frac{(T-\lambda)^2}{\lambda^2}]$ konstruieren. Es hat die Form:

$$T^* = T\frac{\mathbb{E}_{\lambda=1}[T|\underline{Z}]}{\mathbb{E}_{\lambda=1}[T^2|\underline{Z}]}$$

mit $\underline{Z} = (\frac{X_1}{X_n}, \dots, \frac{X_n}{X_n})$.

Wähle $T = \sum_{i=1}^n X_i$ und berechne T^*!

Hinweis: Da T eine suffiziente und vollständige Statistik ist und zudem $\underline{Z}$ nicht von λ abhängt folgt, daß T und $\underline{Z}$ unabhängig sind. (Satz von Basu). Was ergibt sich damit für den bedingten Erwartungswert?

6.37 Zeigen Sie:

Die Familie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ mit $P_\vartheta(\{-1\}) = \vartheta$, $P_\vartheta(\{n\}) = (1-\vartheta)^2\vartheta^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \vartheta < 1$ ist nicht vollständig, d.h. es existiert eine nicht-triviale Folge f_{-1}, f_0, $f_1, \dots$ mit

$$\sum_{n=-1}^{\infty} f_n P_\vartheta(\{n\}) = 0 \quad \forall\, \vartheta\,.$$

6.38 Zeigen Sie:

Die Familie der Binomialverteilungen $B(n,p)$, $0 \le p \le 1$ ist vollständig.

6.39 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Poisson-verteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ist suffiziente Statistik für λ.

6.40 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Gamma-verteilt (siehe Beispiel 4.20). Zeigen Sie:

$$\left(\prod_{j=1}^{n} X_j, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

ist suffizient für (α, β). Speziell ist $\prod_{j=1}^{n} X_j$ suffizient für β bei bekanntem α und $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suffizient für α bei bekanntem β.

6.41 Es seienX_1 und X_2 durch folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion bestimmt und unabhängig:

$$f(0,\vartheta) = e^{-\vartheta}\ ,\ f(1,\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta}\ ,\ f(2,\vartheta) = 1 - e^{-\vartheta} - \vartheta e^{-\vartheta}\ ,\ f(x,\vartheta) = 0 \text{ sonst},$$

wobei $\vartheta > 0$. Man zeige, daß $X_1 + X_2$ nicht suffizient für ϑ ist.

6.42 Man schließe aus Beispiel **??**, daß $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ weder suffizient noch eine konsistente Schätzung für den Parameter μ einer Cauchyverteilung mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\mu)^2]}$ ist.