12. Übung: Lineare Operatoren, Matrixdarstellung

1. Sei $E_1 = \Pi_n$ (Raum der Polynome maximal n-ten Grades). Zeigen Sie, dass durch folgende Vorschriften lineare Operatoren definiert werden, die E_1 in einen linearen Raum E_2 abbilden. Geben Sie E_2 an.

   (a) $(\mathcal{A}x)(t) = t \cdot x(t) + 2x(t^2)$

   (b) $(\mathcal{A}x)(t) = 3x(t) + x'(t)$

2. In $E_1 = \Pi_3$ ist durch $X = \{1, t, t^2, t^3\}$ eine Basis definiert. Definieren Sie sich eine einfache Basis in E_2 und berechnen Sie die Matrixrepräsentation von $\mathcal{A} : x \mapsto x + x'$. Berechnen Sie das Bild und das Urbild von $x(t) = 1 + t + t^2 + t^3$

   (a) durch direkte Berechnung von $(\mathcal{A}x)(t)$ und

   (b) mit Hilfe der Zerlegungskoeffizienten von x und der Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$.

3. Im Raum Π_n mit der Basis $\{1, t, \frac{t^2}{2} \dots, \frac{t^n}{n}\}$ betrachten wir den linearen Operator $(\mathcal{A}x)(t) = x'(t)$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$, wenn im Bildraum die Basis $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ gegeben ist. Ist der Operator umkehrbar?

4. Die Anwendung eines linearen Operators $\mathcal{A}$ auf die Elemente der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ im $\mathbb{R}^4$ ergibt:

   $\mathcal{A}(e_1) = (1, 1, -1, 1)^T,\ \mathcal{A}(e_2) = (1, 0, 0, 0)^T,$
   $\mathcal{A}(e_3) = (0, 1, 0, 0)^T,\ \mathcal{A}(e_4) = (0, 0, -1, 1)^T.$

   Gesucht ist die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in der Standardbasis.

5. Im $\mathbb{R}^4$ sei die Basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ gegeben mit

   $$b_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad b_2 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad b_3 = (1, 0, 0, 1)^T, \quad b_4 = (0, 0, 1, 1)^T.$$

   Die Anwendung eines linearen Operators $\mathcal{A}$ auf diese Basiselemente ergibt

   $$\mathcal{A}(b_1) = (1, 1, -1, 1)^T,\ \mathcal{A}(b_2) = (1, 0, 0, 0)^T,\ \mathcal{A}(b_3) = (0, 1, 0, 0)^T,\ \mathcal{A}(b_4) = (0, 0, -1, 1)^T.$$

   Gesucht ist die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$

   (a) bzgl. der Basis B in die Basis B und

   (b) bzgl. der Basis B in die Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

6. $E_1 = \mathbb{R}^3,\ E_2 = \mathbb{R}^2,\ \mathcal{A} : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (y_1, y_2)^T$ mit $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2 + x_3$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in den Basen

   (a) $\{(1, 0, 0)^T,\ (0, 1, 0)^T,\ (0, 0, 1)^T\}$ in E_1 und $\{(1, 0)^T,\ (0, 1)^T\}$ in E_2,

   (b) $\{(1, 0, 0)^T,\ (0, 1, -1)^T,\ (0, 1, 1)^T\}$ in E_1 und $\{(1, 0)^T,\ (0, 1)^T\}$ in E_2 sowie

   (c) $\{(1, 0, 0)^T,\ (0, 1, -1)^T,\ (0, 1, 1)^T\}$ in E_1 und $\{(1, 0)^T,\ (1, 1)^T\}$ in E_2.