TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik
Prof. M. Stoll
Mathematik III (für Informatiker), WS 2017/18

11. Übung: Lineare Räume

1. Zeigen Sie, dass eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, linear abhängig ist.

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, die Vektoren x, y, z seien linear unabhängig.

   (a) Sind die Vektoren $x - y,\ y - z,\ z - x$ linear abhängig oder unabhängig?

   (b) Sind die Vektoren $x + y,\ y + z,\ z + x$ linear abhängig oder unabhängig?

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{L} = \operatorname{span}(a, b, c, d)$ mit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie eine Basis von $\mathbb{L}$ an.

4. Zeigen Sie: Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \neq 0$ bilden eine Basis im $\mathbb{R}^n$, falls $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$ gilt.

5. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sind die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= (t-a)(t-b), \\ p_2(t) &= (t-a)(t-c), \\ p_3(t) &= (t-b)(t-c) \end{aligned}$$

   linear unabhängig?

6. Zeigen Sie: $p_1(t) = 1,\ p_2(t) = \sin t,\ p_3(t) = \cos t$ sind für $t \in [-\pi; \pi]$ linear unabhängig. Gilt dies auch für

   (a) $1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin^2 t,\ \cos^2 t$ oder

   (b) $1,\ \sin t,\ \cos t,\ \sin 2t,\ \cos 2t$?

7. Zeigen Sie, dass die Vektoren a, b, c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Koordinaten von $x = (2, 0, -1)^T$ bezüglich der Basis $\{a, b, c\}$.

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
`www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php`