10. Übung: Algebraische Strukturen II

1. Vervollständigen Sie die Übersicht aus der 9. Übung mit den Begriffen Ring, Integritätsbereich und Körper.

2. M sei die Menge der sogenannten dualen Zahlen $M = \{a+b\varepsilon : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$.

   Dabei gilt $a_1 + b_1\varepsilon = a_2 + b_2\varepsilon$ dann und nur dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Die Operationen $+$ und $\cdot$ werden folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1\varepsilon) + (a_2 + b_2\varepsilon) &:= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\varepsilon, \\ (a_1 + b_1\varepsilon) \cdot (a_2 + b_2\varepsilon) &:= (a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\varepsilon. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $(M, +, \cdot)$ ein Ring ist.

3. Wir betrachten die Menge $M_0 := \{I, A, B, C\}$ mit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestimmen Sie die kleinste Menge M_1 mit $M_0 \subseteq M_1$, die abgeschlossen bgzl. der Matrizenmultiplikation ist.

   (b) Welche algebraische Struktur hat diese Menge $(M_1, \cdot)$?

4. Wir betrachten die Menge $M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$.

   (a) Welche algebraische Struktur besitzt $(M_2, +, \cdot)$ mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation. Wie können dabei die Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe über $(M_1, \cdot)$ genutzt werden?

   (b) Welche Eigenschaften gelten, wenn wir nur Matrizen mit reellen Koeffizienten betrachten?

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php