9. Übung: Algebraische Strukturen I

1. Stellen Sie die folgenden Begriffe gegenüber:

   Algebraische Struktur, Gruppoid, Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Abelsche Gruppe

2. In welcher der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (oder Teilmengen) werden durch folgende Rechenvorschriften Verknüpfungen definiert?

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}, \qquad \sqrt[3]{a^3+b^3}, \qquad a^2+2ab+b^2, \qquad a^b$$

3. Überprüfen Sie, ob in $\mathbb{N}$ mit

   (a) $a * b := a^b$,

   (b) $a * b := \operatorname{ggT}(a,b)$

   folgende Aussagen wahr sind.

   - Es gibt ein $e \in \mathbb{N}$ mit $a * e = e * a = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$.
   - $a * b = b * a \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

4. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ mit $M = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ eine abelsche Gruppe ist.

5. M sei die Menge aller kongruenten Abbildungen der Ebene, die ein gegebenes gleichseitiges Dreieck in sich überführen. Die Verkettung $f \circ g$ sei die Hintereinanderausführung der zwei Abbildungen g und f.

   (a) Geben Sie M und eine Verknüpfungstafel an.

   (b) Welche algebraische Struktur besitzt $(M, \circ)$?

   (c) Geben Sie alle Untergruppen an.

6. Sei $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ mit $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$ und $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Welche algebraische Struktur wird bezüglich der Verkettung dieser Abbildungen beschrieben? Geben Sie die entsprechende Verknüpfungstafel an.

7. Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2+b^2 \neq 0$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

8. Überprüfen Sie, ob die Menge $M = \{a+b\sqrt{3} \;:\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } a^2-3b^2 = 1\}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe bildet.
   Sind die Zahlen $(2+\sqrt{3})$, $(7+4\sqrt{3})^{10}$ und $(26+15\sqrt{3})^{100}$ in M enthalten?

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
`www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php`