

8. Übung: Ordnungsrelationen

1. Sind folgende Relationen Ordnungsrelationen?

(a) $X = \{1, 2, 3\}$

i) $R = \{(1, 1), (3, 3), (1, 2)\}$

ii) $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (2, 1)\}$

iii) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1)\}$

iv) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

(b) $X = \mathbb{N}$

i) $m \prec n \iff m|n$

ii) $m \prec n \iff |m - 10| \leq |n - 10|$

(c) $X = \mathbb{R}^2$

i) $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2\}$

ii) $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$

2. R_1 und R_2 seien Ordnungsrelationen über X .

Sind $R_1 \cup R_2$ und $R_1 \cap R_2$ wieder Ordnungsrelationen?

3. Sei $X = \mathbb{N}$. Es gelte $m \prec n \iff m$ teilt n , sowie $T = \{a, b\} \subset X$.

Geben Sie das kleinste, größte, minimale, maximale Element von X sowie die Schranken von T an.

4. Sei $X = \mathbb{N}_{10} = \{1, 2, \dots, 10\}$. Es gelte $m \prec n \iff m/n = 2^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Geben Sie alle Ketten der Ordnungsrelation und die Schranken für \mathbb{N}_{10} in \mathbb{N} an.

5. Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie die extremalen Elemente für folgende Ordnungsrelationen an.

(a) $R = \{(a, b) : b = k \cdot a, k \in \mathbb{N}\}$

(b) $R = \{(k, k) : k = 1, \dots, 5\} \cup \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$

6. $X = \{P(x, y) : x, y \in \{0, 1, 2\}\}$, $R = \{(P_1, P_2) \in X^2 : x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2\}$,
 $T = \{P(x, y) \in X : 3x + y \leq 3\}$.

Geben Sie die extremalen Elemente von T an.