

6. Übung: Abbildungen, Funktionen, Relationen

1. Geben Sie alle Funktionen $f: X \rightarrow Y$ an und untersuchen Sie diese auf die Eigenschaften *injektiv*, *surjektiv*, *bijektiv*.

(a) $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2\}$; (b) $X = \{a\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
(c) $X = \{a, b\}$, $Y = \{1\}$; (d) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

2. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f: A \rightarrow B$ *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind.

(a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
(b) $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
(c) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
(d) $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$
(e) $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$
(f) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{1}{n}$
(g) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$

Geben Sie notfalls Einschränkungen A' , B' von A bzw. B an, so dass $f: A' \rightarrow B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie dann die inverse Funktion $f^{-1}: B' \rightarrow A'$.

3. Seien $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f$ ihre Komposition. Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv.

4. Sei $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 5\}$. Bilden Sie A^2 und A^3 .

5. Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Welche Eigenschaften haben folgende Relationen?

(a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 1)\}$
(b) $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$
(c) $R = \{(1, 1)\}$