5. Übung: Vektoranalysis

1. Zeigen Sie, dass für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

gilt: $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = 0\,.$

2. Berechnen Sie die Rotation von $\quad v(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_2 + x_2\, x_3 \\ x_1 + x_1\, x_3 \\ x_1\, x_2 \end{bmatrix}.$

3. Berechnen Sie die Divergenz von

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_1x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2\,x_1^2 - x_2\, x_3 \\ x_2\, e^{x_3} \\ x_1\, e^{x_3} + x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \ \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ bzw. } \vec{x} \in \mathbb{R}^2).$$

4. Berechnen Sie

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}\right).$$

5. Berechnen Sie Δu für folgende Skalarfelder im $\mathbb{R}^n$.

$$u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^\alpha, \qquad u(\vec{x}) = \ln(\|\vec{x}\|).$$

Verwenden Sie dabei die Resultate aus dem vergangenen Semester (6. Übung, Aufgabe 4). Für welche n gilt $\Delta u = 0$?

6. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_S F(\vec{x})\cdot\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}$ für

   (a) $F(\vec{x}) = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $S : x_1 + x_2 + x_3 = a$ $(a > 0)$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $\mathfrak{n}$ zeige nach oben.

   (b) $F(\vec{x}) = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ $(a > 0)$, $\mathfrak{n}$ zeige nach außen. Berechnen Sie das Integral mit und ohne Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.