4. Übung: Kurvenintegrale

1. Berechnen Sie $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ bzw. $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

   (a) für $P = x^2 + y^2$, $Q = xy$ längs der Strecke bzw. längs des Parabelbogens $y = \frac{x^2}{2}$ von $A(0;0)$ nach $B(2;2)$,

   (b) für $P = x + y + z + 1$, $Q = 3x + 2y - z - 2$, $R = 5x - y + z + 7$ längs der Strecke AB bzw. längs des Streckenzuges $AGHB$ mit $A(0;0;0)$, $B(2;3;4)$, $G(2;0;0)$, $H(2;3;0)$.

2. Auf eine Punktmasse m wirkt an jedem Ort $[x,y]^T \in \mathbb{R}^2$ eine Kraft $\vec{F} = [x + y, 2x]^T$. Welche Arbeit W wird verrichtet, wenn m auf der Kreislinie $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ vom Punkt $A(a;0)$ entgegen dem Uhrzeigersinn in den Punkt $B(-a;0)$ verschoben wird $(a > 0)$?

   Hinweis: $W = \int\limits_A^B F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$ für ein Kraftfeld $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$.

3. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ bzw. $\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, indem Sie eine Funktion $U(x,y)$ finden mit $\operatorname{grad} U = [P,Q]^T$ bzw. eine Funktion $U(x,y,z)$ mit $\operatorname{grad} U = [P,Q,R]^T$.

   (a) $P = x$, $Q = y$ von $A(0;0)$ nach $B(2;4)$

   (b) $P = \cos 2y$, $Q = -2x\sin 2y$ von $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ nach $B\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$

   (c) $P = 3x^2 + 2y^2$, $Q = 4xy - 3z^3$, $R = -9yz^2$
   von $A(1;1;1)$ nach $B(2;2;2)$

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php