## 2. Übung: Mehrfachintegrale

1. Skizzieren Sie für die folgenden Doppelintegrale das Integrationsgebiet und vertauschen Sie die Reihenfolge der Integration.

   (a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^a \int_{a-y}^{a^2-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (a > 1)$

   Berechnen Sie die Integrale.

2. Geben Sie einen Überblick über wichtige Koordinatensysteme des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die entsprechenden Transformationsvorschriften an.
   Leiten Sie damit aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$ und der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ verschiedene Darstellungsformen her.

3. Berechnen Sie das Volumen der Körper, die von den folgenden Flächen begrenzt werden.

   (a) $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

   (b) $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$

4. Gegeben seien die folgenden Rotationskörper $\Omega$, deren Radius jeweils durch die Funktion $R\colon [0, H] \to [0, \infty)$ beschrieben wird.

   (a) ein Kegel $R(z) = pz$ mit $p > 0,\ 0 \le z \le H$

   (b) ein Paraboloid $R(z) = \sqrt{pz}$ mit $p > 0,\ 0 \le z \le H$

   (c) eine obere Halbkugel $R(z) = \sqrt{H^2 - z^2}$ mit $0 \le z \le H$

   Berechnen Sie jeweils das Volumen $V$ und den Schwerpunkt $S = (x_s, y_s, z_s)$ der Rotationskörper. Dabei gilt $x_s = \frac{1}{V}\int_\Omega x\,\mathrm{d}\Omega$, $y_s$ und $z_s$ analog.

---

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
`www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php`